Aksel Bertelsen

MATRICER SOM HYPERKOMPLEKSE TAL

Version 2, august 2025.

Indhold

Forord 5

TAL I TO DIMENSIONER **7**

Grundlæggende regneregler i R 7
De komplekse tal 8
Dobbelttal 10
Talsystemer med R^2-struktur 14

TAL I TRE DIMENSIONER **16**

Koordinatvis multiplikation 17
Udregning af produkter 21

MATRICER **23**

Faktorisering 27
Matricer som hyperkomplekse tal 29

DIAGONALISERING **31**

Symmetriske matricer 35
Den traditionelle metode 36

ANVENDELSER **37**

Overgangsmatricer 37
Ellipser 39
Funktioner af to variable 41
To-dimensionale normalfordelinger 43

MATEMATIKHISTORIE **45**

Matricer og diagonalisering 45
Hyperkomplekse talsystemer 48
Weierstrass og Julius Petersen 50

OPGAVER **55**

Stikordsregister **61**

Forord

Hyperkomplekse tal er ukendte for de fleste, men mange kender og arbejder med komplekse tal, som er den simpleste type af hyperkomplekse tal. Komplekse tal har været et meget nyttigt værktøj i et par århundreder, og alligevel har mange ved deres første møde med dem den dag i dag svært ved at acceptere dem som rigtige tal. De bliver opfattet som noget menneskeskabt hokus pokus, som en kanin, der bliver hevet op af hatten. Det er der også noget rigtigt i, men der er absolut ikke noget mystisk ved de mange anvendelser af de komplekse tal, der er af både praktisk og teoretisk art.

Uafhængigt af hinanden blev matricer og de generelle hyperkomplekse tal indført i anden halvdel af 1800-tallet. Et af hovedformålene i det følgende er at vise, at kvadratiske matricer kan opfattes som hyperkomplekse tal, og at vise hvordan teorien for hyperkomplekse tal kan være nyttig i forbindelse med arbejdet med disse matricer.

Kun nogle af de hyperkomplekse talsystemer omtales, nemlig dem, hvor sammenhængen med matrixregning er mest oplagt. Der gives altså ikke en fuldstændig oversigt over alle typer hyperkomplekse talsystemer.

I denne fremstilling af matricer og hyperkomplekse tal forudsættes stort set kun kendskab til det stof, der gennemgås på en gymnasial uddannelse med matematik på A-niveau.

Tak til Andrea Ucini for tilladelse til at benytte hans illustration *Curiosity* på forsiden.

Aksel Bertelsen, Tjæreby 2025.

TAL I TO DIMENSIONER

Vores talsystem har udviklet sig trinvist. Først kom de naturlige tal, som man kan tælle med, senere kom brøkerne til, og endnu senere kvadratrødder og andet, så man havde de reelle tal. Med de reelle tal kan man angive alle afstande mellem punkter på en tallinje, og man taler derfor om et 1-dimensionalt talsystem.

Grundlæggende regneregler i R

I ethvert af disse talsystemer har man kunnet lægge tal sammen, addere, og gange tal med hinanden, multiplicere. De to regneoperationer har opfyldt fem *grundlæggende regneregler*, nemlig at der for alle tal a, b og c i talsystemet gælder følgende:

$$\boxed{\begin{gathered} ab = ba, \qquad a + b = b + a \\ (ab)c = a(bc), \qquad (a + b) + c = a + (b + c) \\ a(b + c) = ab + ac \end{gathered}}$$

Her er ab det produkt, som man får ved at gange a med b, og $a + b$ er den sum, som man får ved at lægge a og b sammen.

Reglerne i den øverste linje i rammen ovenfor kaldes de *kommutative* love for multiplikation og addition. Reglerne i den anden linje er de *associative* love for multiplikation og addition. Den nederste regel er den *distributive* lov for multiplikation og addition, altså den regel, der siger, at man kan gange et tal ind i en parentes ved at gange hvert led i parentesen med tallet.

Den associative lov gør, at man kan undlade parenteser, når man ganger tre tal med hinanden eller adderer tre tal.

Dette kapitel handler om udvidelser af de reelle tal til talsystemer, der er 2-dimensionale, og disse talsystemer er alle konstrueret således, at de grundlæggende regneregler ovenfor er opfyldt.

Der er imidlertid også egenskaber ved de reelle tal, som ikke nødvendigvis gælder for udvidelserne, og som på nogle punkter giver en noget anden algebra. Det drejer sig blandt andet om *nulreglen*, der siger, at et produkt kun kan blive 0, hvis en af faktorerne er 0.

Når nulreglen ikke gælder, vil man heller ikke kunne dividere med ethvert tal forskelligt fra 0. For hvis $ab = 0$, og $a \neq 0$, og man kunne dividere med a på begge sider af lighedstegnet, ville man få, at $b = 0$.

De komplekse tal

I forbindelse med løsning af tredjegradsligninger arbejdede man i slutningen af 1500-tallet med symbolet $\sqrt{-1}$ som et nyt tal. Det eneste man forudsatte om tallet var, at det ganget med sig selv skulle give -1, altså at $\sqrt{-1}^2 = -1$.

Det nye tal indgik på lige fod med de sædvanlige tal, så man fik tal som f.eks. $2 + 3\sqrt{-1}$. Man gangede to tal af denne type ved at bruge de grundlæggende regler for regning med reelle tal, så hvis man f.eks. skulle udregne

$$(2 + 4\sqrt{-1})(3 + 5\sqrt{-1}),$$

gangede man ind i parenteserne, så man fik

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 5\sqrt{-1} + 4 \cdot 3\sqrt{-1} + 4 \cdot 5\sqrt{-1}^2.$$

Da $\sqrt{-1}^2 = -1$ får man så, at produktet bliver $6 + 22\sqrt{-1} - 20$, altså $-14 + 22\sqrt{-1}$. Resultatet er altså også af formen $a + b\sqrt{-1}$.

Fra omkring år 1800 begyndte man at kalde $\sqrt{-1}$ for $\boldsymbol{i}$, således at $\boldsymbol{i}^2 = -1$. Man regnede altså med tal af formen $x + y\,\boldsymbol{i}$, hvor x og y er reelle tal. Disse tal kaldes *komplekse tal*, og mængden af dem kaldes C

De grundlæggende regneregler giver, at man lægger to komplekse tal sammen på følgende måde:

$$(x_1 + y_1\,\boldsymbol{i}) + (x_2 + y_2\,\boldsymbol{i}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\,\boldsymbol{i}.$$

Multiplikation foretages som i eksemplet på forrige side ved at benytte, at $i^2 = -1$, så man får:

$$(x_1 + y_1\,\boldsymbol{i})(x_2 + y_2\,\boldsymbol{i}) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\,\boldsymbol{i}.$$

Man kan regne efter, at den kommutative, den associative og den distributive lov gælder for disse regneoperationer.

Division

Man får en metode til at dividere komplekse tal med hinanden ved først at bemærke, at der for ethvert $\boldsymbol{a} = x + y\,\boldsymbol{i}$ gælder, at

$$(x + y\,\boldsymbol{i})(x - y\,\boldsymbol{i}) = x^2 - y^2\,\boldsymbol{i}^2 = x^2 + y^2.$$

For hvert $\boldsymbol{a}$, hvor $x^2 + y^2 \neq 0$, det vil sige hvor $\boldsymbol{a}$ ikke er 0, eksisterer derfor tallet

$$\boldsymbol{a}^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - y\,\boldsymbol{i})$$

med den egenskab, at $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^{-1} = 1$, og man kalder så $\boldsymbol{a}$ *invertibelt*.

Når $\boldsymbol{a} \neq 0$, kan man finde en løsning til enhver ligning af formen $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, hvor $\boldsymbol{x}$ er ubekendt, ved at gange på begge sider med $\boldsymbol{a}^{-1}$, så man får $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{b}$. Det er denne løsning, som man også kalder $\boldsymbol{b}$ divideret med $\boldsymbol{a}$, og som man også skriver som en brøk med $\boldsymbol{b}$ i tælleren og $\boldsymbol{a}$ i nævneren.

Dobbelttal

Et 2-dimensionalt talsystem i stil med de komplekse tal får man ved at indføre et tal $\boldsymbol{u}$ med den egenskab, at

$$\boldsymbol{u}^2 = 1, \tag{1}$$

og antage, at $\boldsymbol{u}$ ikke er 1 eller -1. Udtryk af formen $x + y\,\boldsymbol{u}$, hvor x og y er reelle tal, kaldes for *dobbelttal*, når $\boldsymbol{u}$ har de nævnte egenskaber. Man kan addere sådanne udtryk ligesom komplekse tal. Da $\boldsymbol{u}^2 = 1$, kan et produkt udregnes således

$$(x_1 + y_1\,\boldsymbol{u})(x_2 + y_2\,\boldsymbol{u}) = x_1x_2 + y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\,\boldsymbol{u}.$$

Produktet minder om det for komplekse tal. Den eneste forskel er fortegnet til y_1y_2. Selvom udregningen af produkterne kun adskiller sig ved et enkelt fortegn, har de to produkter vidt forskellige egenskaber. For dobbelttal får man for eksempel, at

$$(1 + \boldsymbol{u})(1 - \boldsymbol{u}) = 1 - \boldsymbol{u}^2 = 1 - 1 = 0.$$

Nulreglen gælder altså for komplekse tal, men

Nulreglen gælder ikke for dobbelttal.

Specielt er der dermed også dobbelttal forskellige fra 0, som man ikke kan dividere med.

Det bemærkes, at (1) ikke skal opfattes som en ligning med en ubekendt men som en formel, der definerer tallet $\boldsymbol{u}$.

Et dobbelttal $x + y\,\boldsymbol{u}$ kan skrives $x \cdot 1 + y\,\boldsymbol{u}$, og som sådan kan det opfattes som en *vektor* med koordinaterne (x, y) i en *basis* bestående af 1 og $\boldsymbol{u}$. Man lægger nemlig dobbelttal sammen på samme måde vektorer, og man ganger et dobbelttal med et reelt tal på samme måde som en vektor ganges med et tal.

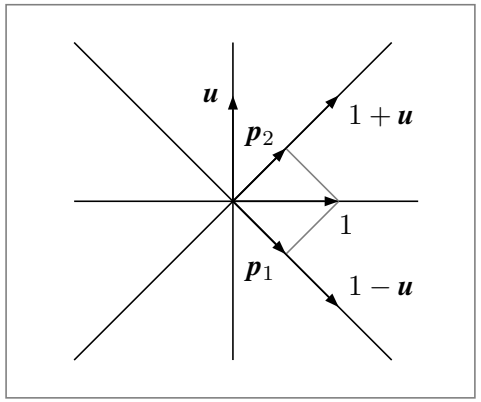
Vi skal i det følgende se, at multiplikation med dobbelttal kan forenkles ved at bruge en anden basis end 1 og $\boldsymbol{u}$.

En ny basis

Som nævnt på forrige side har man, da $\boldsymbol{u}^2 = 1$, at

$$(1+\boldsymbol{u})(1-\boldsymbol{u}) = 0. \tag{2}$$

Når produktet af to dobbelttal tal er 0, kalder man tallene *ortogonale*. I dette tilfælde er $1+\boldsymbol{u}$ og $1-\boldsymbol{u}$ også ortogonale i sædvanlig geometrisk forstand, når de afbildes som vist nedenfor.



Vi indfører nu en ny basis bestående af følgende dobbelttal

$$\boldsymbol{p}_1 = \tfrac{1}{2}(1+\boldsymbol{u}), \qquad \boldsymbol{p}_2 = \tfrac{1}{2}(1-\boldsymbol{u}).$$

Af (2) får man, at $\boldsymbol{p}_1$ og $\boldsymbol{p}_2$ er ortogonale, og det ses også at

$$\boxed{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 1.} \tag{3}$$

De to egenskaber giver, at $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2) = \boldsymbol{p}_1^2$, altså at $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1^2$, og tilsvarende at $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_2^2$. Alt i alt har vi altså:

$$\boxed{\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2 = 0, \qquad \boldsymbol{p}_1^2 = \boldsymbol{p}_1, \qquad \boldsymbol{p}_2^2 = \boldsymbol{p}_2.} \tag{4}$$

Et tal $\boldsymbol{a}$, for hvilket $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}$, kaldes *idempotent*, så både $\boldsymbol{p}_1$ og $\boldsymbol{p}_2$ er altså idempotente tal.

Sammenhænge mellem koordinatsæt

Et dobbelttal kan udtrykkes i den nye basis med $\boldsymbol{p}_1$ og $\boldsymbol{p}_2$ som $s\boldsymbol{p}_1 + t\boldsymbol{p}_2$, og det kan udtrykkes i den oprindelige basis med 1 og $\boldsymbol{u}$ som $x + y\boldsymbol{u}$. Man kan finde en sammenhæng mellem de to koordinatsæt ved at bruge, at $1 = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$, og at

$$\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 = \tfrac{1}{2}(1+\boldsymbol{u}) - \tfrac{1}{2}(1-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u},$$

altså at $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2$. Man får nemlig så, at

$$x + y\boldsymbol{u} = x(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) + y(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2) = (x+y)\boldsymbol{p}_1 + (x-y)\boldsymbol{p}_2,$$

hvilket giver følgende omregningsformel

$$\boxed{s = x + y, \qquad t = x - y.} \tag{5}$$

Ved addition og subtraktion af ligningerne får man så

$$\boxed{x = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}t, \qquad y = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}t.} \tag{6}$$

Indsættes i (5) får man for eksempel, at

$$1 + 4\boldsymbol{u} = 5\boldsymbol{p}_1 - 3\boldsymbol{p}_2, \qquad 5 + 3\boldsymbol{u} = 8\boldsymbol{p}_1 + 2\boldsymbol{p}_2.$$

To tal skrevet med basistallene 1 og $\boldsymbol{u}$ adderes per definition koordinatvist, således at summen i eksemplet ovenfor er $6 + 7\boldsymbol{u}$. Omregnes ved brug af (5) får man tallet $13\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2$, som også er det, som man får ved koordinatvis addition, når basistallene er $\boldsymbol{p}_1$ og $\boldsymbol{p}_2$. Man kan lave et generelt bevis for, at der er koordinatvis addition, når basistallene er $\boldsymbol{p}_1$ og $\boldsymbol{p}_2$, ved at erstatte tallene i eksemplet med bogstaver.

Koordinatvis multiplikation

Multiplikation i den nye basis med $\boldsymbol{p}_1$ og $\boldsymbol{p}_2$ bliver simplere end i den gamle med 1 og $\boldsymbol{u}$. Når $\boldsymbol{a} = s_1\boldsymbol{p}_1 + t_1\boldsymbol{p}_2$ og $\boldsymbol{b} = s_2\boldsymbol{p}_1 + t_2\boldsymbol{p}_2$, får man ved brug af (4) og den distributive lov, at $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$ er lig med

$$s_1s_2\boldsymbol{p}_1^2 + (s_1t_2 + s_2t_1)\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2 + t_1t_2\boldsymbol{p}_2 = s_1s_2\boldsymbol{p}_1 + t_1t_2\boldsymbol{p}_2.$$

Produktet i denne basis kan altså udregnes ved *koordinatvis multiplikation*, og sammenfattende har man, at

$$\boxed{(s_1\boldsymbol{p}_1 + t_1\boldsymbol{p}_2)(s_2\boldsymbol{p}_1 + t_2\boldsymbol{p}_2) = s_1s_2\boldsymbol{p}_1 + t_1t_2\boldsymbol{p}_2.} \tag{7}$$

Multiplikation i de to forskellige baser er illustreret nedenfor med de samme tal, der blev brugt i eksemplet på forrige side.

$$\begin{array}{c} (1+4\boldsymbol{u})(5+3\boldsymbol{u}) = (17+23\boldsymbol{u}) \\ \updownarrow \qquad\quad \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \\ (5\boldsymbol{p}_1 - 3\boldsymbol{p}_2)(8\boldsymbol{p}_1 + 2\boldsymbol{p}_2) = (40\boldsymbol{p}_1 - 6\boldsymbol{p}_2) \end{array}$$

Ved at benytte, at $\boldsymbol{u}^2 = 1$, kan produktet i den øverste linje i rammen ovenfor udregnes således:

$$(1+4\boldsymbol{u})(5+3\boldsymbol{u}) = 5 + 3\boldsymbol{u} + 20\boldsymbol{u} + 12\boldsymbol{u}^2.$$

Man kan også udregne produktet ved at udtrykke de to faktorer i den nye basis som i den nederste linje ved brug af omregningsformlen (5), gange sammen koordinatvist i den nye basis, og så til sidst regne tilbage til den gamle basis ved brug af (6).

Udregning af potenser

Fordelen ved at regne i den nye basis er især tydelig i forbindelse med udregning af potenser, idet (7) giver, at

$$\boxed{(s\boldsymbol{p}_1 + t\boldsymbol{p}_2)^n = s^n\boldsymbol{p}_1 + t^n\boldsymbol{p}_2.} \tag{8}$$

Hvis man f.eks. vil udregne $(3+\boldsymbol{u})^5$, så kan man benytte, at $3 + \boldsymbol{u} = 4\boldsymbol{p}_1 + 2\boldsymbol{p}_2$. Reglen (8) giver så, at

$$(4\boldsymbol{p}_1 + 2\boldsymbol{p}_2)^5 = 4^5\boldsymbol{p}_1 + 2^5\boldsymbol{p}_2 = 1024\boldsymbol{p}_1 + 32\boldsymbol{p}_2.$$

Indsættes i (6), får man så, at $(3+\boldsymbol{u})^5 = 528 + 496\,\boldsymbol{u}$.

Talsystemer med R^2-struktur

Generelt kan man indføre et ikke-reelt tal $\boldsymbol{u}$, og se på tal af formen $x + y\,\boldsymbol{u}$, hvor x og y er reelle tal, og hvor det antages, at

$$\boldsymbol{u}^2 = c + b\,\boldsymbol{u}. \tag{9}$$

Ved den *karakteristiske ligning* for $\boldsymbol{u}$ forstås den ligning, som man får, når man i (9) erstatter $\boldsymbol{u}$ med en variabel x, der står for et reelt tal. Når diskriminanten er positiv, vil der findes to forskellige reelle tal r_1 og r_2, således at ligningen $x^2 - bx - c = 0$ kan skrives $(x - r_1)(x - r_2) = 0$. Det giver, at

$$(\boldsymbol{u} - r_1)(\boldsymbol{u} - r_2) = 0. \tag{10}$$

I ligningen $(x - r_1)(x - r_2) = 0$ kan man bruge nulreglen, men ikke i $(\boldsymbol{u} - r_1)(\boldsymbol{u} - r_2) = 0$. Venstresiderne regnes ud ved at bruge de samme grundlæggende regneregler, og de giver derfor ens udtryk, når x erstattes med $\boldsymbol{u}$ i den ene.

Hvis diskriminanten for den karakteristiske ligning er positiv, kan man definere to nye tal $\boldsymbol{p}_1$ og $\boldsymbol{p}_2$ på følgende måde:

$$\boxed{\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{u} - r_2}{r_1 - r_2}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \frac{\boldsymbol{u} - r_1}{r_2 - r_1}.} \tag{11}$$

Ved direkte udregning, får man, at $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2 = 0$, og at $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = 1$, og dermed også, at $\boldsymbol{p}_1^2 = \boldsymbol{p}_1$, og at $\boldsymbol{p}_2^2 = \boldsymbol{p}_2$.

Ved at gange den ene parentes ind i den anden i (10) og dividere på begge sider med $r_1 - r_2$ får man

$$\boxed{\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}_i = r_i\boldsymbol{p}_i.} \tag{12}$$

Da $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot 1 = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{p}_2$, får man så, at

$$\boldsymbol{u} = r_1\boldsymbol{p}_1 + r_2\boldsymbol{p}_2. \tag{13}$$

Med $\boldsymbol{p}_1$ og $\boldsymbol{p}_2$ som basistal kan ethvert tal skrives

$$s\boldsymbol{p}_1 + t\boldsymbol{p}_2, \tag{14}$$

hvor s og t er reelle tal, og som i tilfældet med dobbelttallene får man, at der både er koordinatvis addition og multiplikation.

Når det er underforstået, at man bruger $\boldsymbol{p}_1$ og $\boldsymbol{p}_2$ som basistal, kan man angive tallet $s\boldsymbol{p}_1 + t\boldsymbol{p}_2$ som et talsæt (s, t). Hvis man arbejder med tallene som talsæt, og man adderer og multiplicerer koordinatvist, kan talsystemet betegnes R^2 eller $R \times R$. Man siger så, at det oprindelige talsystem har R^2-struktur eller at det er isomorft med $(R^2, +, \cdot)$.

Talsættene (1,1) og (0,0) er neutrale ved henholdsvis multiplikation og addition. Nulreglen gælder ikke i R^2, da der for eksempel gælder, at $(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$.

TAL I TRE DIMENSIONER

Til den type af 3-dimensionale talsystemer, der behandles i dette kapitel, svarer en type af n-dimensionale talsystemer, og resultaterne for de 3-dimensionale kan umiddelbart generaliseres til de n-dimensionale talsystemer. Man kan ikke gøre helt det samme ud fra de 2-dimensionale talsystemer, som vi så på i forrige kapitel, da der er et par steder, hvor det ikke er helt oplagt, hvordan der skal generaliseres til n-dimensionale talsystemer.

Vi ser på et hyperkomplekst talsystem A bestående af tal $\boldsymbol{a}$, der kan skrives på formen

$$\boldsymbol{a} = x + y\,\boldsymbol{u} + z\,\boldsymbol{u}^2, \tag{15}$$

hvor x, y og z er reelle tal. Det forudsættes, at $\boldsymbol{u}^2$ ikke er en linearkombination af 1 og $\boldsymbol{u}$, men at der er reelle tal b, c og d, så

$$\boldsymbol{u}^3 = d + c\,\boldsymbol{u} + b\,\boldsymbol{u}^2. \tag{16}$$

Da $\boldsymbol{u}^4 = \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^3$, kan $\boldsymbol{u}^4$ udregnes ved hjælp af denne formel i to trin, og da ethvert produkt af to tal af formen (15) kun indeholder led med $\boldsymbol{u}$ opløftet til en potens mindre eller lig med 4, kan ethvert sådant produkt udregnes ved brug af (16), som det også bliver vist i et konkret eksempel på side 21.

Til talsystemet knyttes *den karakteristiske ligning*, som man får ved at erstatte $\boldsymbol{u}$ i (16) med en reel variabel x. Hvis den karakteristiske ligning har tre forskellige reelle rødder r_1, r_2 og r_3, kan (16) omskrives til

$$(\boldsymbol{u} - r_1)(\boldsymbol{u} - r_2)(\boldsymbol{u} - r_3) = 0.$$

Igen bemærkes at nulreglen ikke gælder for et sådant talsystem, da man så f.eks. ville få $\boldsymbol{u} = r_1$, hvilket ikke kan være tilfældet, da det er forudsat, at $\boldsymbol{u}^2$ ikke er en linearkombination af 1 og $\boldsymbol{u}$.

Hvis der for eksempel gælder, at $\boldsymbol{u}^3 = \boldsymbol{u}$, har man ligningen $\boldsymbol{u}^3 - \boldsymbol{u} = 0$, som kan omskrives til

$$\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{u}-1)\,(\boldsymbol{u}+1) = 0. \tag{17}$$

Man kan nemlig sætte $\boldsymbol{u}$ udenfor en parentes i $\boldsymbol{u}^3 - \boldsymbol{u}$, som så bliver til $\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{u}^2 - 1)$, og $\boldsymbol{u}^2 - 1$ er lig med $(\boldsymbol{u}-1)(\boldsymbol{u}+1)$. Her er r_i'erne altså 0, 1 og -1.

Koordinatvis multiplikation

Vi ser nu på talsystemer, hvor ligningen (16) kan omskrives til en ligning af formen

$$\boxed{(\boldsymbol{u}-r_1)(\boldsymbol{u}-r_2)(\boldsymbol{u}-r_3) = 0,} \tag{18}$$

hvor r_1, r_2 og r_3 er forskellige reelle tal. Vi ser nu på en ny basis bestående af følgende tal:

$\boldsymbol{p}_1$	$\boldsymbol{p}_2$	$\boldsymbol{p}_3$
$\dfrac{(\boldsymbol{u}-r_2)(\boldsymbol{u}-r_3)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}$	$\dfrac{(\boldsymbol{u}-r_1)(\boldsymbol{u}-r_3)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}$	$\dfrac{(\boldsymbol{u}-r_1)(\boldsymbol{u}-r_2)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}$

Ligningerne kan sammenfattes i følgende formel, hvor højresiden er et produkt af faktorer af form som brøken:

$$\boxed{\boldsymbol{p}_i = \prod_{j\neq i} \frac{\boldsymbol{u}-r_j}{r_i-r_j}} \tag{19}$$

Tallene $\boldsymbol{p}_i$ er parvis ortogonale, da et produkt af to af dem indeholder alle faktorerne i (18) og derfor er 0. Ved at gange parenteserne i tællerne ud ses, at tallene alle kan skrives på formen $x + y\,\boldsymbol{u} + z\,\boldsymbol{u}^2$.

Ganges de to sidste parenteser i (18) ind i den første, og divideres med $(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)$, får man $\boldsymbol{u}\boldsymbol{p}_1 - r_1\boldsymbol{p}_1 = 0$, det vil sige, at $\boldsymbol{u}\boldsymbol{p}_1 = r_1\boldsymbol{p}_1$. Ved på tilsvarende måde at gange ind i anden og tredje parentes får man alt i alt, at der for $i = 1, 2, 3$ gælder, at

$$\boxed{\boldsymbol{u}\boldsymbol{p}_i = r_i\boldsymbol{p}_i} \tag{20}$$

Hvis $\boldsymbol{u}$ opfattes som en sædvanlig reel variabel u bliver udtrykkene $\boldsymbol{p}_i$ til andengradspolynomier $p_i(u)$ med sum 1. Andengradspolynomiet $p_1(u) + p_2(u) + p_3(u) - 1$ bliver nemlig 0 for hver af de tre forskellige u-værdier r_1, r_2 og r_3, og da et andengradspolynomium forskelligt fra 0 kun kan have to nulpunkter, må $p_1(u) + p_2(u) + p_3(u) - 1$ være 0 for alle u. Det giver, at $p_1(u) + p_2(u) + p_3(u) = 1$ for alle u. Ligningen gælder også, når u erstattes af et hyperkomplekst tal $\boldsymbol{u}$, så

$$\boxed{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 = 1.} \tag{21}$$

Ved at gange med $\boldsymbol{p}_i$ på begge sider af denne ligning, får man, at $\boldsymbol{p}_i^2 = \boldsymbol{p}_i$, da $\boldsymbol{p}_i$'erne er parvis ortogonale, så

$$\boxed{\boldsymbol{p}_i'\text{erne er parvis ortogonale idempotente tal.}} \tag{22}$$

Ved brug af (20) og (21) får man, at

$$\boldsymbol{u} = r_1\boldsymbol{p}_1 + r_2\boldsymbol{p}_2 + r_3\boldsymbol{p}_3 \tag{23}$$

$$\boldsymbol{u}^2 = r_1^2\boldsymbol{p}_1 + r_2^2\boldsymbol{p}_2 + r_3^2\boldsymbol{p}_3. \tag{24}$$

Den øverste ligning følger af, at $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\cdot 1 = \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3)$ og den nederste følger så af, at $\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{u}\,(r_1\boldsymbol{p}_1 + r_2\boldsymbol{p}_2 + r_3\boldsymbol{p}_3)$.

Hvis $\boldsymbol{a} = x + y\,\boldsymbol{u} + z\,\boldsymbol{u}^2$ er et vilkårligt tal, kan man erstatte 1, $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{u}^2$ med udtrykkene i (21), (23) og (24), så $\boldsymbol{a}$ får formen

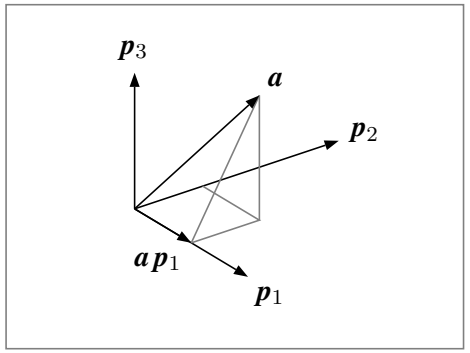
$$\boxed{\boldsymbol{a} = m_1\boldsymbol{p}_1 + m_2\boldsymbol{p}_2 + m_3\boldsymbol{p}_3,} \tag{25}$$

hvor koefficienterne m_i er reelle tal. Ganger man på begge sider af (25) med $\boldsymbol{p}_1$ får man, at $\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}_1 = m_1\boldsymbol{p}_1$, da $\boldsymbol{p}_i$'erne er parvis ortogonale, og $\boldsymbol{p}_1$ er idempotent. Tilsvarende hvis man ganger med $\boldsymbol{p}_2$ og $\boldsymbol{p}_3$, så for alle i gælder, at

$$\boxed{\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}_i = m_i\boldsymbol{p}_i.} \tag{26}$$

Ethvert tal $\boldsymbol{a}$ kan derfor på netop én måde kan skrives formen (25). Tallene $\boldsymbol{p}_i$ udgør altså en ny basis for talsystemet, og talsættet (m_1, m_2, m_3) kalder vi $\boldsymbol{p}_i$-koordinaterne for tallet $\boldsymbol{a}$.

Hvis man har givet $\boldsymbol{p}_i$-koordinaterne (m_1, m_2, m_3) for $\boldsymbol{a}$, kan man finde x, y og z, så $\boldsymbol{a}$ bliver skrevet som $\boldsymbol{a} = x \cdot 1 + y\,\boldsymbol{u} + z\,\boldsymbol{u}^2$ ved at udregne $m_1\boldsymbol{p}_1 + m_2\boldsymbol{p}_2 + m_3\boldsymbol{p}_3$ ved brug af (19).



Når tallene i talsystemet opfattes som 3-dimensionale vektorer, er $\boldsymbol{a}\boldsymbol{p}_i$ en *projektion* af $\boldsymbol{a}$ på $\boldsymbol{p}_i$.

For et givet tal $\boldsymbol{a}$ kan man se på afbildningen $f_{\boldsymbol{a}}$, der til ethvert tal $\boldsymbol{b}$ knytter tallet $f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$. Når $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ opfattes som vektorer, er afbildningen $f_{\boldsymbol{a}}$ en lineær afbildning. Hvis $f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{p})$ er proportional med $\boldsymbol{p}$, altså hvis der findes et reelt tal k, så $\boldsymbol{a}\boldsymbol{p} = k\boldsymbol{p}$, kaldes k en *egenværdi*, og $\boldsymbol{p}$ kaldes en *egenvektor* for $f_{\boldsymbol{a}}$ hørende til k. For alle $\boldsymbol{a}$ er basistallene $\boldsymbol{p}_i$ altså egenvektorer for $f_{\boldsymbol{a}}$.

Koordinatvis multiplikation

Koordinatudtrykkene for et produkt af to tal får en særlig simpel form, hvis der bruges en basis bestående af parvis ortogonale idempotente. Hvis man nemlig udregner $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$, hvor

$$\boldsymbol{a} = m_1\boldsymbol{p}_1 + m_2\boldsymbol{p}_2 + m_3\boldsymbol{p}_3,$$

$$\boldsymbol{b} = n_1\boldsymbol{p}_1 + n_2\boldsymbol{p}_2 + n_3\boldsymbol{p}_3,$$

får man, da $\boldsymbol{p}_i$'erne er parvis ortogonale idempotente, at der er *koordinatvis multiplikation*, altså at

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = m_1n_1\boldsymbol{p}_1 + m_2n_2\boldsymbol{p}_2 + m_3n_3\boldsymbol{p}_3.$$

Et tal $m_1\boldsymbol{p}_1 + m_2\boldsymbol{p}_2 + m_3\boldsymbol{p}_3$ kan angives som (m_1, m_2, m_3), og da der både er koordinatvis addition og multiplikation har talsystemet altså R^3-struktur.

Selvom man i princippet kan udregne produkter ved koordinatvis multiplikation, får man i praksis imidlertid ofte nogle uhåndterlige størrelser, hvis de karakteristiske rødder, der indgår i (19), ikke er pæne.

Hvis man for eksempel ser på talsystemet, hvor $\boldsymbol{u}^3 = 3\,\boldsymbol{u}^2 - 1$, vil tallene r_i være løsningerne til ligningen $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Der findes formler til løsning af en sådan tredjegradsligning, men de eksakte udtryk for løsningerne er ikke nemme at arbejde videre med. Man kan så istedet udregne produkter ved metoden, der er omtalt på de næste sider.

Udregning af produkter

Som et konkret eksempel på udregning af et produkt i et tilfælde, hvor den karakteristiske ligning ikke har pæne rødder, ser vi på det talsystem, hvor

$$\boldsymbol{u}^3 = 2\,\boldsymbol{u}^2 + 1. \tag{27}$$

Vi vil udregne produktet af følgende tal

$$\boldsymbol{a} = 3 - 5\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^2, \qquad \boldsymbol{b} = 6 + 3\,\boldsymbol{u} + 2\,\boldsymbol{u}^2.$$

Standardmetoden er først at gange hvert led i den ene faktor med hvert led i den anden faktor, hvilket giver

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = 18 - 21\,\boldsymbol{u} - 3\,\boldsymbol{u}^2 - 7\,\boldsymbol{u}^3 + 2\,\boldsymbol{u}^4. \tag{28}$$

Da $\boldsymbol{u}^4 = \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^3 = 2\,\boldsymbol{u}^3 + \boldsymbol{u}$, får man, at

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = 11 - 19\,\boldsymbol{u} - 17\,\boldsymbol{u}^2 + 4\,\boldsymbol{u}^3.$$

Endnu en gang erstattes $\boldsymbol{u}^3$ med $2\,\boldsymbol{u}^2 + 1$, og man får

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = 15 - 19\,\boldsymbol{u} - 9\,\boldsymbol{u}^2. \tag{29}$$

F.eks. ved udregning af potenser kan det blive ret besværligt at bruge denne metode, og et alternativ er følgende.

Polynomiers division

I (27), i $\boldsymbol{a}$ og i $\boldsymbol{b}$ erstattes $\boldsymbol{u}$ med x, hvor x betegner en reel variabel, og vi sætter $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$, og

$$g(x) = 3 - 5x + x^2, \qquad h(x) = 6 + 3x + 2x^2.$$

Produktet $g(x)h(x)$ bliver det samme som (28), når man dér erstatter $\boldsymbol{u}$ med x.

Ved division af polynomiet $g(x)h(x)$ med $f(x)$ får man resten $-9x^2 - 19x + 15$, som vist nedenfor.

$$\begin{array}{r|l|l}
x^3 - 2x^2 - 1 & 2x^4 - 7x^3 - 3x^2 - 21x + 18 & 2x - 3 \\
\cline{3-3}
 & \underline{2x^4 - 4x^3 + 0x^2 - 2x} & \\
 & -3x^3 - 3x^2 - 19x & \\
 & \underline{-3x^3 + 6x^2 + 0x + 3} & \\
 & -9x^2 - 19x + 15 &
\end{array}$$

Erstattes x med $\boldsymbol{u}$ i resten, får man (29). Denne måde at gange på er let at anvende i cas-værktøjer, hvor man både kan få udregnet $g(x)h(x)$ og resten ved division af dette resultat med $f(x)$.

Hvorfor denne fremgangsmåde fungerer

Hvorfor man generelt kan udregne et produkt $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$ ved polynomiers division kan forklares således: Man kan som i eksemplet se på de polynomier $g(x)$ og $h(x)$, som man får ved at erstatte $\boldsymbol{u}$ med x i $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$. I formlen (16) for $\boldsymbol{u}^3$ kan man også erstatte $\boldsymbol{u}$ med x og omskrive til en ligning af formen $f(x) = 0$. Polynomiers division giver, at

$$g(x)h(x) = q(x)f(x) + r(x),$$

hvor resten $r(x)$ har lavere grad end $f(x)$, og kvotienten $q(x)$ er et polynomium. Indsættes $\boldsymbol{u}$ i stedet for x får man

$$g(\boldsymbol{u})\,h(\boldsymbol{u}) = q(\boldsymbol{u})\,f(\boldsymbol{u}) + r(\boldsymbol{u}).$$

Da $f(\boldsymbol{u}) = 0$ har man så, at $g(\boldsymbol{u})h(\boldsymbol{u}) = r(\boldsymbol{u})$, og da $r(\boldsymbol{u})$ har lavere grad end $f(\boldsymbol{u})$, er det lig med produktet.

MATRICER

De følgende sider kan læses som en introduktion til matricer, og for læsere, der er fortrolige med matricer, giver de overblik over de resultater, vi får brug for, og som det er nyttigt at kunne referere til.

Vi ser på et lineært ligningssystem med to ligninger og to ubekendte som det nedenfor:

$$\begin{aligned} 1 &= 2x - 3y \\ 9 &= 4x + y. \end{aligned} \tag{30}$$

Det kan gøres mere overskueligt, hvis man skriver det ved hjælp af en *matrix* $\boldsymbol{A}$, der indeholder ligningssystemets koefficienter:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

De fire tal i matricen kaldes matricens *indgange*. Matricens rækker og søjler kan opfattes som henholdsvis række- og søjlevektorer. Ligningssystemet (30) vil vi skrive

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

I udtrykket på højre side af lighedstegnet ganger man en matrix med en søjlevektor, og resultatet er altså den søjlevektor, som man får ved at udregne skalarproduktet af hver af rækkevektorerne i matricen med søjlevektoren.

En vilkårlig matrix $\boldsymbol{A}$ med to rækker og 2 søjler kaldes også en 2×2 matrix, og indgangene benævnes som vist nedenfor,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

hvor a_{ij} er elementet i række i og søjle j. Mængden af alle 2×2 matricer kaldes $M_2(R)$.

Sum af matricer og tal gange matrix

Den simpleste regneoperation med to matricer er addition. For to matricer $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$, der skrives

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

danner man *summen* således

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

Man ganger et reelt tal med en matrix på følgende måde:

$$x\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} xa_{11} & xa_{12} \\ xa_{21} & xa_{22} \end{pmatrix}.$$

Med disse regneoperationer bliver $M_2(R)$ et 4-dimensionalt vekterrum, hvor man som basisvektorer kan vælge de fire matricer, der som indgange har ét 1-tal og tre 0'er. Ved brug af regneoperationerne ovenfor kan enhver matrix $M_2(R)$ nemlig skrives som en linearkombination af disse fire basisvektorer.

Produkt af 2×2 matricer

Hvis man for en given søjlevektor $\boldsymbol{v}$ og to matricer $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ først udregner $\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{v}$, og dernæst udregner $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})$, får man en søjlevektor, der kan skrives $\boldsymbol{AB}\,\boldsymbol{v}$, hvor

$$\boxed{\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}} \tag{31}$$

Matricen $\boldsymbol{AB}$ kaldes produktet af $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ eller $\boldsymbol{A}$ gange $\boldsymbol{B}$. Hvis man sætter $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$, ser man, at c_{ij} udregnes som prikproduktet af række i i $\boldsymbol{A}$ og søjle j i $\boldsymbol{B}$. Man siger, at $\boldsymbol{A}$ gange $\boldsymbol{B}$ udregnes ved *række-søjle multiplikation*.

Produktet af $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ er altså defineret således, at der for en vilkårlig søjlevektor $\boldsymbol{v}$ gælder, at

$$\boxed{(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{v}).} \tag{32}$$

Matricerne $\boldsymbol{O}$ og $\boldsymbol{E}$ nedenfor er neutrale ved hhv. addition og multiplikation, d.v.s. at $\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$ for alle $\boldsymbol{A}$,

$$\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hvis man i (32) erstatter $\boldsymbol{v}$ med $\boldsymbol{Cv}$ får man, at

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Cv} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Cv})) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{v}$$

for alle søjlevektorer $\boldsymbol{v}$. Lader man så $\boldsymbol{v}$ have koordinaterne (1,0) og (0,1), får man, at søjlerne i $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ og $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ er ens. Der gælder altså, at $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$, d.v.s. at den associative lov er opfyldt i forbindelse med multiplikation af matricer.

Ved direkte udregning ses, at den distributive lov gælder, men at matrixmultiplikationen ikke er kommutativ, og at nulreglen ikke gælder.

Generelt om matricer

Alt det foregående om 2×2-matricer kan overføres direkte til mængden $M_n(R)$ af $n\times n$-matricer, altså matricer med reelle indgange og n rækker og n søjler. Række-søjle multiplikationen er illustreret nedenfor i et eksempel med 3×3 matricer.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \boxed{2 \;\; 1 \;\; 3} \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 \\ \boxed{1} & 1 & 3 \\ \boxed{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ \boxed{9} & 1 & 7 \\ 9 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Prikproduktet af række 2 i den første matrix og første søjle i den anden giver $2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 3\cdot 2$, altså 9.

Hvis en $n\times n$ matrix med søjlevektorerne $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \cdots \boldsymbol{s}_n$ betegnes $(\,\boldsymbol{s}_1\,|\,\boldsymbol{s}_2\,|\,\cdots\,|\,\boldsymbol{s}_n\,)$ giver række-søjle multiplikationen, at

$$\boldsymbol{A}(\,\boldsymbol{s}_1\,|\,\boldsymbol{s}_2\,|\cdots|\,\boldsymbol{s}_n\,) = (\,\boldsymbol{As}_1\,|\,\boldsymbol{As}_2\,|\,\cdots\,|\,\boldsymbol{As}_n\,), \tag{33}$$

eller med andre ord: Søjle j i $\boldsymbol{AB}$ er $\boldsymbol{A}$ gange søjle j i $\boldsymbol{B}$.

For en $n\times m$ matrix $\boldsymbol{A}$ og en $m\times k$ matrix $\boldsymbol{B}$ kan man også definere produktet $\boldsymbol{AB}$ ved række-søjle multiplikation, men hvis $n\neq k$ eksisterer $\boldsymbol{BA}$ ikke.

En $n\times n$ matrix gange en søjlevektor med n koordinater kan opfattes som et produkt af to matricer, idet søjlevektoren er en $n\times 1$ matrix.

Endnu en konsekvens af række-søjle multiplikationen er, at hvis en søjlevektor $\boldsymbol{v}$ har koordinaterne $v_1, \cdots, v_n$ så er

$$(\,\boldsymbol{s}_1\,|\,\boldsymbol{s}_2\,|\,\cdots\,|\,\boldsymbol{s}_n\,)\,\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{s}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{s}_n, \tag{34}$$

så en matrix gange en vektor giver altså en vektor, der er en linearkombination af matricens søjler.

En matrix $\boldsymbol{D}$ med indgange d_{ij} kaldes en *diagonalmatrix*, hvis $d_{ij}=0$, når $i\neq j$, og den betegnes $\mathrm{diag}(d_{11},\cdots,d_{nn})$. Den diagonalmatrix, hvor $d_{ii}=1$ for alle i, betegnes $\boldsymbol{E}$, og den er neutral ved multiplikation, det vil sige, at $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$ for alle $\boldsymbol{A}$ i $M_n(R)$.

Den *transponerede* til en matrix $\boldsymbol{A}$ med indgange a_{ij} er matricen $\boldsymbol{A}'$, hvor $a'_{ij}=a_{ji}$. Et eksempel er vist nedenfor:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 5 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 3 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Det ses, at man får $\boldsymbol{A}'$ ved en spejling af $\boldsymbol{A}$ i diagonalen fra øverste venstre hjørne til nederste højre hjørne. Man kan vise, at der generelt gælder, at $(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$. En matrix $\boldsymbol{A}$ kaldes *symmetrisk*, hvis $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$.

Faktorisering

Det følgende handler om $n \times n$ matricer $\boldsymbol{U}$, der ikke opfylder en ligning af grad mindre end n, men opfylder en ligning

$$\boxed{(\boldsymbol{U} - r_1\,\boldsymbol{E})(\boldsymbol{U} - r_2\,\boldsymbol{E}) \cdots (\boldsymbol{U} - r_n\,\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O},} \tag{35}$$

hvor $r_1 \cdots, r_n$ er forskellige reelle tal. Ved at gange parenteserne ud, får man at der så findes reelle tal $a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$, så

$$\boldsymbol{U}^n + a_{n-1}\,\boldsymbol{U}^{n-1} + \cdots + a_1\,\boldsymbol{U} + a_0\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}. \tag{36}$$

For en konkret matrix af denne type vil man kunne bestemme koefficienterne $a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ ved at udregne potenserne af $\boldsymbol{U}$ op til $\boldsymbol{U}^n$ og løse et lineært ligningssystem.

Eksempel. Lad $\boldsymbol{U}$ være 3×3 matricen, der er vist nedenfor.

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Udregnes potenserne $\boldsymbol{U}^2$ og $\boldsymbol{U}^3$ får man et ligningssystem

$$\boldsymbol{U}^3 + a_2\,\boldsymbol{U}^2 + a_1\,\boldsymbol{U} + a_0\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O},$$

der umiddelbart består af ni ligninger med tre ubekendte. Ser man bare på de tre ligninger, der svarer til indgangene i øverste række af matricerne, får man et lineært ligningssystem med tre ligninger med tre ubekendte. Man får, at $a_2 = -11, a_1 = 36$ og $a_0 = -36$. Man kan så regne efter, at

$$\boldsymbol{U}^3 - 11\,\boldsymbol{U}^2 + 36\,\boldsymbol{U} - 36\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}. \tag{38}$$

Når man her erstatter $\boldsymbol{U}$ med en talvariabel x, får man ligningen $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = 0$, der har rødderne 2, 3 og 6.

Venstresiden af denne ligning kan faktoriseres, så man får

$$(x-2)(x-3)(x-6) = 0.$$

Venstresiden af (38) kan derfor faktoriseres tilsvarende til

$$(\boldsymbol{U} - 2\,\boldsymbol{E})(\boldsymbol{U} - 3\,\boldsymbol{E})(\boldsymbol{U} - 6\,\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O},$$

da parenteserne ganges ud på samme måde i de to tilfælde.

Symmetriske 2×2 matricer

Det er særligt enkelt at afgøre om en symmetrisk 2×2 matrix opfylder en ligning af formen (35), idet man kan udlede følgende:

> For enhver symmetrisk 2×2 matrix $\boldsymbol{U}$, der ikke er proportional med $\boldsymbol{E}$, findes to forskellige reelle tal r_1 og r_2, så der gælder, at $(\boldsymbol{U} - r_1\,\boldsymbol{E})(\boldsymbol{U} - r_2\,\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$.

For at vise dette kan man se på en vilkårlig symmetrisk 2×2 matrix

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Man får, at $\boldsymbol{U}^2 - (a+d)\boldsymbol{U} + (ad - b^2)\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$. Ligningen

$$x^2 - (a+d)x + ad - b^2 = 0. \tag{39}$$

har to forskellige reelle løsninger, netop hvis diskriminanten D er positiv, og man får, at

$$D = (a+d)^2 - 4ad + 4b^2 = (a-d)^2 + 4b^2.$$

Det ses, at D er positiv med mindre $a = d$ og $b = 0$, altså med mindre $\boldsymbol{U}$ er proportional med $\boldsymbol{E}$.

Matricer som hyperkomplekse tal

Vi skal nu se, hvordan teorien for 2-dimensionale hyperkomplekse tal kan udnyttes i forbindelse med en given 2×2 matrix. Som eksempel bruges først matricen $\boldsymbol{U}$ nedenfor til venstre, der tilfredsstiller ligningen nedenfor til højre:

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{U}^2 = 10\,\boldsymbol{U} - 16\,\boldsymbol{E}. \tag{40}$$

Ligningen $x^2 - 10x + 16 = 0$ har rødderne $r_1 = 2$ og $r_2 = 8$, så $(x-2)(x-8) = 0$, og der gælder derfor også, at

$$(\boldsymbol{U} - 2\,\boldsymbol{E})(\boldsymbol{U} - 8\,\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O},$$

da parenteserne med $\boldsymbol{U}$ ganges ud på samme måde som parenteserne med x.

Formlen (11) brugt på hyperkomplekse tal af formen $a\,\boldsymbol{E} + b\,\boldsymbol{U}$ giver to ortogonale idempotente matricer $\boldsymbol{P}_1$ og $\boldsymbol{P}_2$:

$$\boldsymbol{P}_1 = \frac{\boldsymbol{U} - 8\,\boldsymbol{E}}{2-8}, \qquad \boldsymbol{P}_2 = \frac{\boldsymbol{U} - 2\,\boldsymbol{E}}{8-2},$$

og direkte udregning giver, at

$$\boldsymbol{P}_1 = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_2 = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Af (13) får man så følgende formel

$$\boxed{\boldsymbol{U} = 2\,\boldsymbol{P}_1 + 8\,\boldsymbol{P}_2.} \tag{41}$$

Det bemærkes, at man kan behandle matricer af formen $a\,\boldsymbol{E} + b\,\boldsymbol{U}$ som hyperkomplekse tal, fordi disse matricer opfylder de grundlæggende regneregler på side 7. Den kommutative lov for multiplikation er opfyldt, da $\boldsymbol{U}$ og $\boldsymbol{E}$ kommuterer.

Udregning af potenser af en matrix

Når man opløfter højresiden af (41) til en potens, og ganger parenteser ud, forsvinder alle led, der indeholder både $\boldsymbol{P}_1$ og $\boldsymbol{P}_2$, da $\boldsymbol{P}_1$ og $\boldsymbol{P}_2$ er ortogonale, og da de også er idempotente, får man følgende formel til udregning af potenser af $\boldsymbol{U}$:

$$\boxed{\boldsymbol{U}^n = 2^n\,\boldsymbol{P}_1 + 8^n\,\boldsymbol{P}_2.} \tag{42}$$

Det bliver ofte besværligt at finde potenser af en matrix, hvis det gøres ved gentagen udregning af produkter af to matricer, og formlen ovenfor er derfor meget anvendelig ved udregning af potenser af $\boldsymbol{U}$, da man helt undgår at udregne produkter af matricer. Metoden kan bruges på enhver symmetrisk 2×2 matrix, der ikke er proportional med $\boldsymbol{E}$ ifølge side 28.

Kvadratiske matricer generelt

Lad nu $\boldsymbol{U}$ være en $n \times n$ matrix som øverst på side 27, der altså opfylder en ligning af typen

$$(\boldsymbol{U} - r_1\,\boldsymbol{E}) \cdots (\boldsymbol{U} - r_n\,\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O},$$

hvor $r_1 \cdots, r_n$ er forskellige reelle tal. Ved at bruge (19) på hyperkomplekse tal af formen

$$a_{n-1}\boldsymbol{U}^{n-1} + \cdots + a_1\,\boldsymbol{U} + a_0\,\boldsymbol{E}$$

får man som ved (23), at $\boldsymbol{U}$ kan skrives på formen

$$\boldsymbol{U} = r_1\,\boldsymbol{P}_1 + \cdots + r_n\,\boldsymbol{P}_n,$$

hvor $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_n$ er parvis ortogonale idempotente matricer. Som i eksemplet med 2×2 matricen kan denne formel så for eksempel bruges til at udregne potenser af $\boldsymbol{U}$.

DIAGONALISERING

Vi skal nu se en anden fremgangsmåde, der kan benyttes til at få udregnet potenser af matricer. Den kræver lidt mere generel teori om matricer, som gennemgås på denne og næste side.

Determinant

Første gang de fleste møder *determinanter* er i forbindelse med et ligningssystem med 2 ligninger med 2 ubekendte af formen

$$\begin{aligned} e &= ax + by \\ f &= cx + dy \end{aligned} \tag{43}$$

hvor de ubekendte er x og y. Ved brug af lige store koefficienters metode får man, at

$$(ad - bc)x = de - bf, \qquad (ad - bc)y = af - ce. \tag{44}$$

Hvis $ad-bc$ er forskellig fra 0, kan x og y isoleres, og man får så en løsningsformel for de ubekendte. Tallet $ad - bc$ kaldes ligningssystemets determinant. Som vi så på side 23 kan ligningernes koefficienter opstilles i en matrix, som her bliver til

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{45}$$

I stedet for at tale om ligningssystemets determinant, taler man så om *matricens determinant*. Den betegnes $\det(\boldsymbol{A})$, så

$$\det(\boldsymbol{A}) = ad - bc. \tag{46}$$

Man kan så vise, at når determinanten er lig 0, så er der enten 0 eller uendeligt mange løsninger til ligningssystemet. Alt i alt får man altså, at der er præcis én løsning, netop når determinanten er forskellig fra 0.

På tilsvarende måde kan der til enhver $n \times n$ matrix $\boldsymbol{A}$ knyttes en determinant, $\det(\boldsymbol{A})$, så et ligningssystem af formen $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ har præcis én løsning, netop når determinanten er forskellig fra 0. Her er $\boldsymbol{u}$ en ukendt søjlevektor med n koordinater.

Vi får ikke brug for en generel formel til udregning af determinanten til en matrix $\boldsymbol{A}$ ud over, at en sådan vil give, at

$$\boxed{\text{Det}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}) \text{ er et polynomium af grad } n \text{ i } x.} \tag{47}$$

Hvis $\boldsymbol{A}$ for eksempel er som i (45), giver (46), at $\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E})$ er lig med $x^2 - (a + d)x + ad - bc$.

Invertible matricer

En $n \times n$ matrix $\boldsymbol{A}$ kaldes *invertibel*, hvis der findes en $n \times n$ matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$, så $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$. Matricen $\boldsymbol{A}^{-1}$ kaldes så den *inverse* matrix til $\boldsymbol{A}$, og den kan udregnes på en række forskellige måder, som vi ikke behøver at komme nærmere ind på.

Antag, at $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{s}_1 \,|\, \boldsymbol{s}_2 \,|\, \cdots \,|\, \boldsymbol{s}_n)$. Søjlerne $\boldsymbol{s}_i$ kaldes *lineært uafhængige*, hvis ingen af dem er en linearkombination af de øvrige. Vi får brug for følgende resultat, som ikke bevises her:

$$\boxed{\text{Hvis } \boldsymbol{A} \text{ har lineært uafhængige søjler er } \boldsymbol{A} \text{ invertibel.}}$$

Ved brug af (34) ser man, at søjlerne i $\boldsymbol{A}$ er lineært afhængige, netop hvis der findes en *egentlig* vektor $\boldsymbol{v}$ med koordinaterne $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, så $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$. Dette er ifølge bemærkningerne øverst på siden igen ensbetydende med, at determinanten for $\boldsymbol{A}$ er lig med 0. En kvadratisk matrix er altså invertibel, når determinanten er forskellig fra 0.

Et eksempel på diagonalisering

Lad nu $\boldsymbol{U}$ være matricen fra side 29, hvor

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_1 = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_2 = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix},$$

Man så, at $\boldsymbol{U} = 2\boldsymbol{P}_1 + 8\boldsymbol{P}_2$, hvor $\boldsymbol{P}_1$ og $\boldsymbol{P}_2$ er de to ortogonale idempotente matricer, der er vist ovenfor. Af (12) får man

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{P}_1 = 2\boldsymbol{P}_1, \qquad \boldsymbol{U}\boldsymbol{P}_2 = 8\boldsymbol{P}_2. \tag{48}$$

Nedenfor er angivet to vektorer $\boldsymbol{v}_1$ og $\boldsymbol{v}_2$ med den egenskab, at $\boldsymbol{v}_i$ er proportional med søjlerne i $\boldsymbol{P}_i$, sammen med $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{v}_1 \,|\, \boldsymbol{v}_2)$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Formlerne (33) og (48) giver, som man også let ser direkte, at

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{v}_1, \qquad \boldsymbol{U}\boldsymbol{v}_2 = 8\boldsymbol{v}_2. \tag{49}$$

Hvis $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(2, 8)$, får man af (33) og (49), at

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}. \tag{50}$$

Da $\det(\boldsymbol{Q}) \neq 0$, er $\boldsymbol{Q}$ er invertibel, så (50) kan skrives

$$\boxed{\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.} \tag{51}$$

Denne formel er en anden udgave af $\boldsymbol{U} = 2\boldsymbol{P}_1 + 8\boldsymbol{P}_2$. Man siger, at $\boldsymbol{Q}$ *diagonaliserer* $\boldsymbol{U}$.

Sammenhængen (51) kan også skrives $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{-1}$, og da $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}$, er $\boldsymbol{U}^n = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{Q}^{-1}$, som er en parallel til (42), idet $\boldsymbol{D}^n = \operatorname{diag}(2^n, 8^n)$.

Egenværdier og egenvektorer

Fremgangsmåden i det foregående eksempel kan kopieres for en vilkårlig $n \times n$ matrix $\boldsymbol{U}$, som opfylder en ligning af formen

$$(\boldsymbol{U} - r_1\boldsymbol{E}) \cdots (\boldsymbol{U} - r_n\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O},$$

hvor $r_1, \cdots, r_n$ er n forskellige reelle tal.

Første trin er at bestemme n parvis ortogonale idempotente matricer $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_n$ ved formlen (19). Som i forbindelse med (20) ses, at $\boldsymbol{U}\boldsymbol{P}_i = r_i\boldsymbol{P}_i$ for alle i. For hvert i kan man vælge en egentlig søjlevektor $\boldsymbol{v}_i$ i $\boldsymbol{P}_i$, og der gælder så, at

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{v}_i = r_i\boldsymbol{v}_i. \tag{52}$$

Tallene r_i kaldes *egenværdier* for $\boldsymbol{U}$, og $\boldsymbol{v}_i$ kaldes en *egenvektor* for $\boldsymbol{U}$ hørende til r_i. Sættes $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{v}_1 \,|\, \cdots \,|\, \boldsymbol{v}_n)$ og $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(r_1, \cdots, r_n)$, får man som ved (50), at $\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}$.

Vektorerne $\boldsymbol{v}_i$ er lineært uafhængige, ellers ville en af dem, $\boldsymbol{v}_j$, eventuelt ved omnummerering kunne skrives

$$\boldsymbol{v}_j = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{j-1}\boldsymbol{v}_{j-1},$$

hvor $\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_{j-1}$ er lineært uafhængige. Ganges med $\boldsymbol{U}$ på begge sider af ligningen ovenfor og bruges (52), får man, at

$$r_j\boldsymbol{v}_j = a_1r_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{j-1}r_{j-1}\boldsymbol{v}_{j-1}.$$

Ganges den øverste ligning med r_j, hvorefter den trækkes fra den nederste ligning får man, at

$$0 = (a_1r_1 - a_1r_j)\,\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (a_{j-1}r_{j-1} - a_{j-1}r_j)\,\boldsymbol{v}_{j-1}.$$

Dette er i modtrid med antagelsen om, at $\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_{j-1}$ er lineært uafhængige. Matricen $\boldsymbol{Q}$ er altså invertibel, så $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}$.

Symmetriske matricer

Lad nu $\boldsymbol{U}$ være en *symmetrisk* $n \times n$ matrix, som opfylder en ligning af formen $(\boldsymbol{U}-r_1\boldsymbol{E})\cdots(\boldsymbol{U}-r_n\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$, hvor $r_1, \cdots, r_n$ er n forskellige reelle tal, og lad $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_n$ være n parvis ortogonale idempotente matricer givet ved formlen (19).

Alle $\boldsymbol{P}_i$ er også symmetriske, da de er en linearkombination af potenser af $\boldsymbol{U}$, som er symmetriske.

Lad nu $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ være valgt, så $\boldsymbol{v}_i$ er en egentlig søjle i $\boldsymbol{P}_i$.

$$\boxed{\text{Når } i \neq j \text{ er } \boldsymbol{v}_i \text{ og } \boldsymbol{v}_j \text{ ortogonale}} \tag{53}$$

En søjle i $\boldsymbol{P}_i$ er nemlig også en række i $\boldsymbol{P}_i$, da $\boldsymbol{P}_i$ er symmetrisk, og prikproduktet af en række i $\boldsymbol{P}_i$ og en søjle i $\boldsymbol{P}_j$ er 0, da $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{0}$.

Man kan derfor vælge $\boldsymbol{Q}$, der diagonaliserer $\boldsymbol{U}$, så søjlerne i $\boldsymbol{Q}$ er parvis ortogonale *enhedsvektorer*. Da vil gælde, at

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}.$$

Dette følger af række-søjle multiplikationen, da en række i $\boldsymbol{Q}'$ er en søjle i $\boldsymbol{Q}$. Prikproduktet af række i i $\boldsymbol{Q}'$ og søjle j i $\boldsymbol{Q}$ giver nemlig 1, hvis $i = j$, da man så tager prikproduktet af en normeret søjle med sig selv, og prikproduktet giver 0, hvis $i \neq j$, da man så tager prikproduktet af to ortogonale søjler. Man har altså så, at $\boldsymbol{Q}$ er invertibel, og at $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}'$. Man siger, at $\boldsymbol{Q}$ er en *ortogonalmatrix*.

Det kan være en fordel at vælge $\boldsymbol{Q}$ som en ortogonalmatrix af flere grunde. For det første undgår man at skulle bruge formler til at finde $\boldsymbol{Q}^{-1}$, og man slipper derved for et regnearbejde, der kan være ret voldsomt. For det andet kan man vise, at prikproduktet af to vektorer $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er det samme som prikproduktet af $\boldsymbol{Qa}$ og $\boldsymbol{Qb}$, hvilket også er en fordel i nogle anvendelser.

Den traditionelle metode

Diagonalisering af en $n \times n$ matrix $\boldsymbol{U}$ behandles normalt noget anderledes end i det foregående. Den almindelige fremgangsmåde er, at man først søger at finde egenværdierne for $\boldsymbol{U}$, altså de reelle tal r hvortil der hører en egentlig vektor $\boldsymbol{x}$, en egenvektor, så

$$\boldsymbol{Ux} = r\,\boldsymbol{x}. \tag{54}$$

Man udleder en metode til at bestemme egenværdierne ved at bemærke, at (54) er ensbetydende med, at $(\boldsymbol{U} - r\,\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Dette er igen ensbetydende med, at $\det(\boldsymbol{U} - r\,\boldsymbol{E}) = 0$. Ved at udregne determinanten får man en ligning af grad n med r som ubekendt, der kaldes den *karakteristiske ligning* for $\boldsymbol{U}$.

I de situationer, hvor der er n forskellige reelle løsninger til $\det(\boldsymbol{U} - r\,\boldsymbol{E}) = 0$, altså n forskellige egenværdier, vil der være n tilhørende egenvektorer. For hver egenværdi findes en egentlig vektor $\boldsymbol{x}$, så (54) er opfyldt, og når man kender r, kan $\boldsymbol{x}$ i princippet bestemmes ved at løse det lineære ligningssystem (54).

Ligningen $\det(\boldsymbol{U} - r\,\boldsymbol{E}) = 0$ er den samme ligning som den man får, når man bestemmer koefficienter $a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$, således, at $\boldsymbol{U}^n + a_{n-1}\,\boldsymbol{U}^{n-1} + \cdots + a_1\,\boldsymbol{U} + a_0\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ og derefter erstatter $\boldsymbol{U}$ med talvariablen r. Dette er indholdet af den sætning, der kaldes Cayley-Hamiltons sætning, som ikke bevises her.

Egenvektorerne vil være lineært uafhængige, som vist nederst side 34. Man kan så diagonalisere $\boldsymbol{U}$ ved en matrix $\boldsymbol{Q}$, der har de fundne egenvektorer som søjler.

Det bemærkes, at det ved diagonalisering ved hjælp af n parvis ortogonale idempotente matricer $\boldsymbol{P}_i$ ikke er nødvendigt med en formel for determinanten af en matrix. Man behøver heller ikke at skulle løse det lineære ligningssystem (54), idet egenvektorer er givet ved de idempotente matricer $\boldsymbol{P}_i$.

ANVENDELSER

I dette kapitel er valgt fire anvendelser af resultaterne i de forrige kapitler. De er illustreret med 2×2 matricer, men for dem alle gælder, at der findes tilsvarende anvendelser for $n \times n$ matricer, hvor n er større end 2.

Overgangsmatricer

Det følgende er et eksempel på, hvordan potenser af matricer kan bruges til at forudsige hvordan visse populationer udvikler sig. Vi tænker os en bestand af træer, hvor man på et tidspunkt, som sættes til år 0, opdager, at nogle træer er syge. Efter et år observerer man, at 90 procent af de raske træer stadig er raske, og at 70 procent af de syge træer er blevet raske.

For at opstille en model for hvordan det vil gå, hvis denne udvikling fortsætter, kan man se på en vektor $\boldsymbol{b}_n$ med koordinaterne x_n og y_n, som angiver antallet af henholdsvis raske og syge efter n år. Sammenhængen mellem $\boldsymbol{b}_{n+1}$ og $\boldsymbol{b}_n$ kan så beskrives ved følgende model:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.9\,x_n + 0.7\,y_n \\ y_{n+1} &= 0.1\,x_n + 0.3\,y_n \end{aligned}.$$

På matrixform kan ligningerne sammanfattes til

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Hvis man kalder 2×2 matricen ovenfor for $\boldsymbol{U}$, kan ligningen skrives $\boldsymbol{b}_{n+1} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{b}_n$.

En matrix som $\boldsymbol{U}$ ovenfor, hvor alle indgange er større eller lig 0, og summen af indgangene i enhver søjle er lig med 1, kaldes en *overgangsmatrix*.

Tager man udgangspunkt i $\boldsymbol{b}_0 = (x_0, y_0)$, og går frem ved hvert år at gange med overgangsmatricen $\boldsymbol{U}$ får man, at

$$\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{U}^n\,\boldsymbol{b}_0.$$

Man kan altså undersøge, hvad der sker med $\boldsymbol{b}_n$, når n går mod uendelig, ved at undersøge $\boldsymbol{U}^n$, når n går mod uendelig.

Man finder, at $\boldsymbol{U}^2 - 1.2\,\boldsymbol{U} + 0.2\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$. Erstattes $\boldsymbol{U}$ med talvariablen x får man $x^2 - 1.2x + 0.2 = 0$, som har løsningerne $r_1 = 1$ og $r_2 = 0.2$. Af (11) og (13) får man så, at

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}_1 + 0.2\,\boldsymbol{P}_2, \tag{55}$$

hvor $\boldsymbol{P}_1$ og $\boldsymbol{P}_2$ er de ortogonale idempotente matricer

$$\boldsymbol{P}_1 = \tfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_2 = \tfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Som bemærket tidligere, f.eks. på side 30, får man så, at

$$\boldsymbol{U}^n = \boldsymbol{P}_1 + 0.2^n\,\boldsymbol{P}_2, \tag{56}$$

Når n går mod uendelig, vil $\boldsymbol{U}^n$ gå mod $\boldsymbol{P}_1$, da 0.2^n går mod 0. Vektoren $\boldsymbol{b}_n = (x_n, y_n)$ går så mod $\boldsymbol{P}_1\,\boldsymbol{b}_1$, som giver, at

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \to (x_0 + y_0)\begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.125 \end{pmatrix}.$$

Man nærmer sig altså en fordeling, hvor 87.5 procent af træerne er raske. Grænsefordelingen er proportional med en søjle i $\boldsymbol{P}_1$, som er en egenvektor for $\boldsymbol{U}$.

Problemet kan for eksempel også løses ved at udnytte, at $x_n + y_n = t$, hvor t er det totale antal træer, og så omskrive ligningen $x_{n+1} = 0.9\,x_n + 0.7\,y_n$ til $x_{n+1} = 0.9\,x_n + 0.7\,(t - x_n)$, hvilket giver en lineær differensligning af første orden.

Ellipser

Det følgende eksempel går ud på at vise, at (57) nedenfor er ligning for en ellipse, og på at bestemme ellipsens placering,

$$6x^2 - 4xy + 9y^2 = 10. \tag{57}$$

Først bemærkes, at ligningen kan skrives

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 10.$$

Når vi kalder 2×2 matricen for $\boldsymbol{U}$, gælder at $\boldsymbol{U}^2 - 15\,\boldsymbol{U} + 50\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$. Ligningen $x^2 - 15x + 50 = 0$ har rødderne $r_1 = 5$ og $r_2 = 10$, så (11) og (13) giver at

$$\boldsymbol{U} = 5\,\boldsymbol{P}_1 + 10\,\boldsymbol{P}_2, \tag{58}$$

hvor $\boldsymbol{P}_1$ og $\boldsymbol{P}_2$ er følgende ortogonale idempotente matricer:

$$\boldsymbol{P}_1 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_2 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Vi lader $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{v}'$ være søjlevektoren hhv. rækkevektoren med koordinaterne x og y. Ligningen kan så skrives

$$\boldsymbol{v}'\,\boldsymbol{U}\,\boldsymbol{v} = 10.$$

Ved at dividerer med 5 og indsætte (58), får man så, at

$$\boldsymbol{v}'\,\boldsymbol{P}_1\,\boldsymbol{v} + 2\,\boldsymbol{v}'\,\boldsymbol{P}_2\,\boldsymbol{v} = 2.$$

Både $\boldsymbol{P}_1$ og $\boldsymbol{P}_2$ har form som matricen på venstresiden nedenfor

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by)^2,$$

hvor venstresiden altså er lig med kvadratet på en toleddet størrelse.

Af udtrykkene i (59) ses, at de toleddede størrelser for $\boldsymbol{P}_1$ og $\boldsymbol{P}_2$ kan vælges som

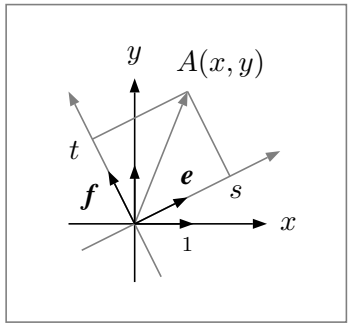
$$s = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2x + y), \qquad t = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-x + 2y). \tag{60}$$

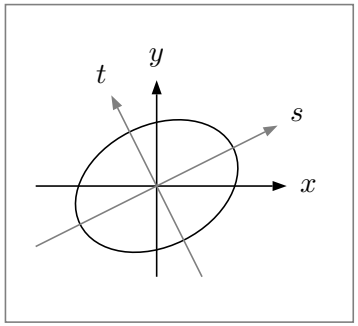
Ligningen (57) bliver så til $s^2 + 2t^2 = 2$, som også kan skrives

$$\frac{s^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{t^2}{1^2} = 1. \tag{61}$$

Det er ligningen for en ellipse med halvakser $\sqrt{2}$ og 1, hvis (s, t) er koordinaterne til et punkt på ellipsen i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem.

Vi ser nu på en drejning om (0,0) af (x, y)-koordinatsystemet, hvor billedet af vektoren (1,0) er $\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ og billedet af vektoren (0,1) er $\boldsymbol{f} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)$. Lad A være et punkt med koordinaterne (x, y) i det oprindelige koordinatsystem. Søjlevektoren med koordinaterne x og y kaldes igen $\boldsymbol{v}$.

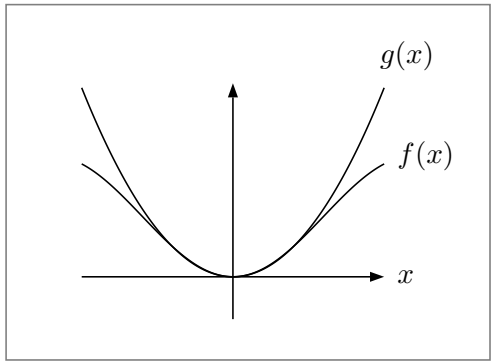




Af figuren ovenfor til venstre ses, at førstekoordinaten til A i det drejede koordinatsystem er koefficienten til $\boldsymbol{e}$, når man projicerer $\boldsymbol{v}$ på $\boldsymbol{e}$. Formlen for en sådan projektion giver så, at denne førstekoordinat er $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}$, som er lig med s fra (60). Tilsvarende får man, at andenkoordinaten til A i det drejede koordinatsystem er t fra (60). Ellipsen kan altså tegnes ud fra (61) i det drejede koordinatsystem, og den er vist på figuren ovenfor til højre.

Funktioner af to variable

For en funktion $f(x)$, hvor $f'(0) = 0$, er der vandret tangent til grafen i $x = 0$, og hvis $f(0) = 0$, kan grafen i et område omkring 0 tilnærmes med grafen for $g(x) = \frac{1}{2}f''(0)x^2$, som er en parabel. Det er illustreret nedenfor med $f(x) = 1 - \cos(x)$ og $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.



Når en funktion $f(x, y)$ har partielle afledede $f'_x(0, 0)$ og $f'_y(0, 0)$, der begge er 0, gælder tilsvarende, at grafen har vandret tangentplan i $(x, y) = (0, 0)$, og hvis $f(0, 0) = 0$, kan grafen i en omegn om (0,0) tilnærmes med grafen for

$$g(x, y) = \tfrac{1}{2}(x\ y) \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matricen ovenfor bestående af de dobbeltafledede kaldes *Hessematricen* i (0,0). Når de afledede er kontiunuerte i (0,0), er Hessematricen symmetrisk: $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$

Som eksempel kan man se på $f(x, y) = 6x^2 - 4xy + 9y^2 - x^3$, og hvis $\boldsymbol{H}$ betegner Hessematricen, får man

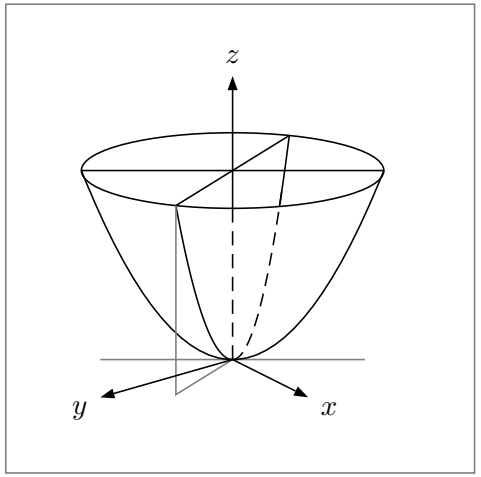
$$\tfrac{1}{2}\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Funktionen kan tilnærmes med $g(x, y) = 6x^2 - 4xy + 9y^2$ omkring (0,0), da x^3 her er lille i forhold til de øvrige led.

Ved brug af resultaterne om ellipsen på side 39-40 får man, hvad man også let kan kontrollere direkte, at

$$g(x, y) = (2x + y)^2 + 2(-x + 2y)^2.$$

Heraf ses, at $g(x, y)$ er mindst mulig, når begge parenteser er 0, hvilket indtræffer, når $(x, y) = (0, 0)$. Det bemærkes, at egenværdierne til $\frac{1}{2}\boldsymbol{H}$ ifølge side 39 er 5 gange koefficienterne til parenteserne. Grafen for $g(x, y)$ er illustreret nedenfor.



Noget helt tilsvarende sker generelt, når begge egenværdier til $\boldsymbol{H}$ er positive, og man vil så have et lokalt minimum i (0,0).

Grafen for $g(x, y)$ kaldes en *elliptisk paraboloide*. For et givet positivt tal k kan man se på den *niveaukurve*, der består af punkter i (x, y)-planen for hvilke $g(x, y) = k$. Niveaukurverne vil være ellipser, og de vil være de samme ellipser, som man får ved en vinkelret projektion på (x, y)-planen af skæringspunkterne mellem grafen og planer parallelle med xy-planen. Ellipsernes akser bestemmes af egenvektorerne for $\boldsymbol{H}$.

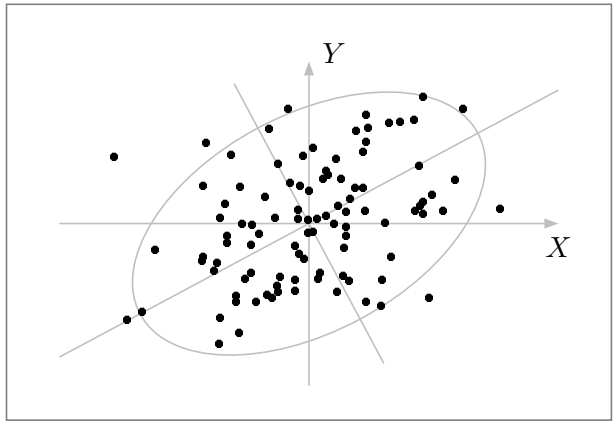
Skæres grafen med en plan, der indeholder z-aksen, får man parabler, som illustreret på figuren ovenfor.

To-dimensionale normalfordelinger

Hvis Z_1 og Z_2 er to uafhængige stokastiske variable, der begge er normalfordelte med middelværdi 0 og spredning 1, kan man konstruere to andre stokastiske variable X og Y således

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}.$$

Man kan få et indtryk af fordelingen af (X, Y) ved at få genereret 100 tilfældige værdier af Z_1 og Z_2 og udregne de tilhørende par (X, Y). Figuren nedenfor viser resultatet af en sådan simulation.



Fordelingen af de simulerede punkter kan beskrives ved hjælp af den såkaldte *kovariansmatrix* $\boldsymbol{\Sigma}$, som udregnes således:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

På figuren ovenfor er tegnet ellipsen med ligningen

$$9x^2 + 6xy + 5y^2 = 200.$$

Egenværdierne for $\boldsymbol{\Sigma}$ er $r_1 = 7 + \sqrt{13}$ og $r_2 = 7 - \sqrt{13}$. Forholdet mellem kvadratrødderne af r_1 og r_2 er lig med forholdet mellem længderne af ellipsens halvakser.

Vektoren med koordinaterne $(1, \frac{1}{3}(-2 + \sqrt{13}))$ er egenvektor for $\boldsymbol{\Sigma}$ hørende til r_1, og den er retningsvektor for ellipsens ene akse.

De stokastiske variable X og Y er korrelerede. Korrelationen kan udregnes ved hjælp af indgangene i $\boldsymbol{\Sigma}$, men her skal blot bemærkes, at tallet 3 i $\boldsymbol{\Sigma}$ ville have været 0, hvis X og Y ikke var korrelerede.

Ellipserne E_k med ligninger af formen $9x^2 + 6xy + 5y^2 = k$, hvor k er et positivt tal, har den egenskab, at sandsynligheden for at et simuleret punkt falder i et givet lille område omkring et punkt P_1 på E_k er tilnærmelsesvis den samme som sandsynligheden for at et simuleret punkt falder i et tilsvarende lille område omkring et punkt P_2 på E_k. Denne sandsynlighed er en aftagende funktion af k.

Lægges et givet talpar (μ_1, μ_2) til ethvert af de simulerede punkter, får man punkter $(X + \mu_1, Y + \mu_2)$, og man taler så om at disse punkter stammer fra en 2-dimensional normalfordeling med middelværdi (μ_1, μ_2).

De 2-dimensionale normalfordelinger er de mest brugte modeller til at beskrive fordelingener af par af observationer, der ikke er uafhængige af hinanden.

En 2-dimensional normalfordeling med middelværdi (0,0) er givet ved de tre parametre, der indgår i $\boldsymbol{\Sigma}$. At man oftest karakteriserer disse normalfordelinger ved en matrix, istedet for bare at angive de tre parametre, hænger blandt andet sammen med, at man har formlen $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$.

Mange vigtige anvendelser af diagonalisering i praksis, som for eksempel indenfor billedanalyse og kvantemekanik, er svære at illustrere forholdsvis kortfattet i modsætning til anvendelserne i dette kapitel. Til sidst skal endnu en gang bemærkes, at diagonalisering er nyttig ved udregning af potenser af matricer, som det har været vist flere gange i de tidligere kapitler.

MATEMATIKHISTORIE

I dette kapitel behandles den historiske udvikling af matricer og hyperkomplekse talsystemer hver for sig. Første del handler om determinanter og matricer i perioden fra 1750 til nu, mens andel del handler om hyperkomplekse tal i perioden 1820-1910.

Matricer og diagonalisering

Før man var begyndt at arbejde med matricer som selvstændige objekter, havde man arbejdet med de udtryk som vi nu kalder determinanter til lineære ligningssystemer bestående af n ligninger med n ubekendte dog uden endnu at bruge ordet determinant. For eksempel gav Maclaurin (1698-1746) og Cramer (1704-1752) omkring 1750 løsningsformler for sådanne ligningssystemer i de tilfælde, hvor determinanten er forskellig fra 0.

Ordet *determinant* blev indført af Cauchy (1789-1857) i 1815, hvor han også opstillede ligningssystemernes koefficienterne for sig selv i rækker og søjler, men uden at tale om en matrix.

Matricer

Navnet *matricer* optrådte først hos Sylvester (1814-1897) i 1851. I 1858 udgav Arthur Cayley (1821-1895) den første større teori om matricer i *Memoir on the theory of matrices*. Her indtroducerede han regning med matricer, idet han gav regler for sum og produkt af matricer. Han havde nogle år tidligere gjort opmærksom på, at matricer var nyttige i arbejdet med lineære ligningssystemer, idet ligningssystemerne kan skrives som omtalt på side 23.

Han indførte den *inverse* matrix som hjælpemiddel til at udtrykke løsningerne til ligningssystemerne.

Den sætning, som vi nu kalder Cayley-Hamiltons sætning, beviste Cayley i 1858 for 2×2 og 3×3 matricer, og han formodede, at den gjaldt generelt. Et generelt bevis blev givet 20 år senere af Frobenius (1849-1917).

Egenværdier og egenvektorer

Problemet med at finde en ligning for symmetriakserne for en ellipse med en ligning af formen

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = k \tag{62}$$

blev løst af Cauchy i 1829 ved en metode, der på mange måder svarer til den, der blev beskrevet på side 39. Han brugte ikke ordene matrix, egenværdi og egenvektor, men arbejdede reelt med sådanne størrelser.

Det følgende viser, hvordan man med datidens metoder får problemet lavet om et problem, der handler om at finde egenvektorer.

Vi ser på et punkt på ellipen, hvor der ikke er lodret tangent. I en omegn om punktet er y en funktion $f(x)$ af x. Ved differentation på begge sider af (62) mht. x får man, idet $y' = f'(x)$,

$$2ax + 2by + 2bxy' + c2yy' = 0.$$

Hvis $bx + cy \neq 0$ kan y' isoleres, så man får

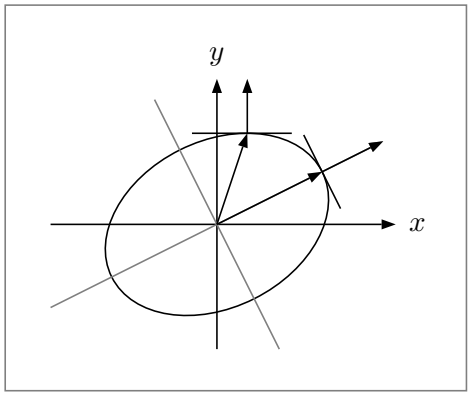
$$y' = \frac{-ax - by}{bx + cy}.$$

Vektoren $(1, y')$ er en retningsvektor for tangenten til ellipsen i (x, y), og den er proportional med $(bx + cy, -ax - by)$, som så også er en retningsvektor for tangenten. Tværvektoren til vektoren $(bx + cy, -ax - by)$, altså $(ax + by, bx + cy)$, er derfor en normalvektor til tangenten.

Geometrisk ses, som illustreret på figuren nedenfor, at i et ellipsepunkt, der ligger på en af symmetriakserne, er normalvektoren til tangenten proportional med retningsvektoren for punktet, så $(ax+by, bx+cy) = r(x,y)$, eller med nutidig matrixnotation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{63}$$

At bestemme punkter på symmetriakserne er altså lavet om til et problem, der handler om at finde egenvektorer.



Ved venstresiden af (63) knytter matricen til hver punkt på ellipsen en normalvektor til tangenten i punktet.

QR-algoritmen

Selv med brug af elektroniske regnemaskiner er det svært at bestemme egenværdier for en $n \times n$-matrix ved at løse den karakteristiske ligning, når n er stor. Især i anden halvdel af 1900-tallet blev der arbejdet meget på at udvikle numeriske metoder til bestemmelse af egenværdier, og i 1961 blev QR-algoritmen opfundet. Denne algoritme er i princippet ret simpel, men meget effektiv.

Hyperkomplekse talsystemer

Indtil omkring 1820 var mange skeptiske overfor matematiske arbejder, der involverede regning med $\sqrt{-1}$ som et tal. Dette ændrede sig, da *algebraens fundamentalsætning* blev bevist i begyndelsen af 1800-tallet. Denne sætning siger, at der er mindst én kompleks rod i ethvert ikke-konstant polynomium i én variabel med komplekse koefficienter. Med den kom der system i så meget matematik teori, at det var tydeligt, at de komplekse tal er nyttige.

Kvaternioner og triplets

Matematikere begyndte at arbejde med 3-dimensionale hyperkomplekse tal fra omkring 1830 uden dog endnu at benytte denne betegnelse. Af særlig betydning fik det arbejde, som irlænderen William Rowan Hamilton (1805-1865) lavede. I årene efter 1830 ledte han efter størrelser, som han på engelsk kaldte *triplets*, af samme type som de komplekse tal, men med tre reelle koordinater, altså størrelser af formen

$$a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j}.$$

De kommutative og associative love, og den distributive lov skulle gælde, og man skulle kunne dividere med ethvert tal forskelligt fra nul.

Hans forsøg mislykkedes, men i stedet fandt han i 1843 de såkaldte *kvaternioner*, der har 4 reelle koordinater og formen

$$a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}.$$

Hamilton kunne definere nogle regneregler for disse tal, som opfyldte de krav han oprindeligt stillede til sine triplets, bortset fra at den kommutative lov ikke gjaldt.

Brødrene John og Charles Graves fortsatte arbejdet med triplets, og opstillede regneregler, således at den kommutative lov gjaldt, men hvor man til gengæld ikke kunne dividere med alle tal forskellige fra 0. Arbejdet resulterede bl.a. i en artikel fra 1844 skrevet af Charles Graves med titlen *On algebraic triplets*, der handlede om triplets $x + y\boldsymbol{u} + z\boldsymbol{u}^2$, hvor $\boldsymbol{u}^3 = 1$.

Klassifikation

Amerikaneren Benjamin Peirce (1809-1880) udgav i 1870 en længere artikel med titlen *Linear associative algebra*, som var hans betegnelse for et hyperkomplekst talsystem. Han forudsatte dog ikke, at der var et gange-neutralt tal. I artiklen indfører han begreberne *nilpotente* og *idempotente* udtryk på følgende måde:

> When an expression raised to the square or any higher power vanishes, it may be called *nilpotent*; but when, raised to the square or any higher power, it gives itself as the result, it may be called *idempotent*.

Artiklen er i øvrigt ret svær at læse, fordi han ellers ofte bruger begreber, der ikke længere anvendes. Han gav en næsten fuldstændig klassifikation af hyperkomplekse talsystemer med dimension op til 6. To talsystemer tilhørte samme klasse, hvis deres algebraiske strukturer, som vi ville sige det idag, var isomorfe.

Som eksempel kan man tage de 2-dimensionale talsystemer, hvor der er tre klasser. Den ene består af de talsystemer, der har struktur som R^2, den anden af dem, der har struktur som de komplekse tal, og den tredje af dem, der har et nilpotent tal. De består alle af tal af formen $a + b\boldsymbol{u}$, og de er karakteriseret ved om $\boldsymbol{u}$ opfylder en andengradsligning med en diskriminant, der er henholdsvis positiv, negativ eller 0.

Langt nemmere at forstå og lidt mindre ambitiøs var den artikel, som Eduard Study (1862-1930) udgav i 1890 med titlen *Über Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen*. Study klassificerer alle talsystemer af dimension til og med fire, og han arbejder med formlen (19).

Divisionsalgebraer

Et hyperkomplekst talsystem, hvor man kan dividere med ethvert tal forskelligt fra nul, kaldes en *divisionsalgebra* over R. Divisionsalgebraerne blev klassificeret af F. G. Frobenius (1849-1917) i 1877, hvor han beviste, at de eneste divisionsalgebraer over R er de reelle tal R, de komplekse tal C og kvaternionerne H, som er henholdsvis 1-, 2- og 4-dimensionale talsystemer.

Weierstrass og Julius Petersen

Metoden, der blev brugt i kapitlet med de 3-dimensionale talsystemer, blev anvendt i en mere generel form af Karl Weierstrass (1815-1897) i 1884 i en artikel med titlen *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen*. Artiklens ret imponerende indledning er vist på næste side.

Her ser Weierstrass på n-dimensionale tal af formen

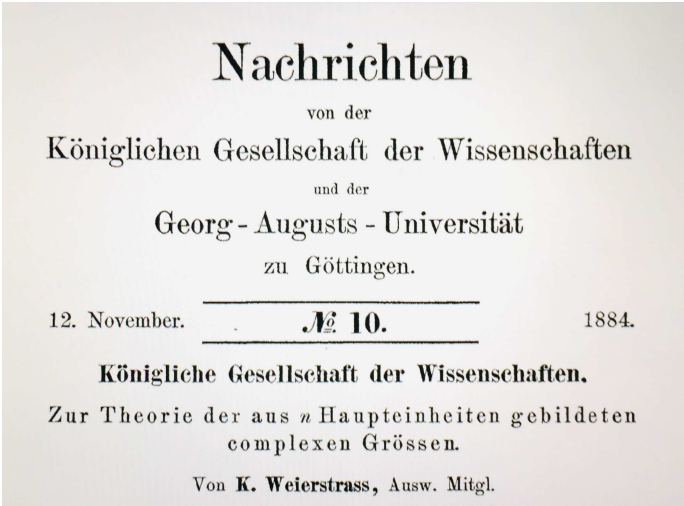
$$x_0 + x_1\boldsymbol{u} + \cdots + x_{n-1}\boldsymbol{u}^{n-1}, \tag{64}$$

hvor koefficienterne x_i er reelle tal, og hvor det antages, at der findes reelle tal a_i, så

$$\boldsymbol{u}^n = a_0 + a_1\boldsymbol{u} + \cdots + a_{n-1}\boldsymbol{u}^{n-1}. \tag{65}$$

Man vidste, at en ligning som (65) kan omskrives til en ligning af formen $f(\boldsymbol{u}) = 0$, hvor $f(\boldsymbol{u})$ er et produkt af første- og andengradspolynomier i $\boldsymbol{u}$ med reelle koefficienter.

Weierstrass viser i artiklen, at hvis det forudsættes, at disse første- og andengradspolynomier ikke har rødder, der indgår to gange, så har multiplikation med hans hyperkomplekse tal særligt pæne egenskaber, for eksempel at der ikke vil være nilpotente tal i talsystemet.



Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

12. November. № 10. 1884.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen.

Von **K. Weierstrass**, Ausw. Mitgl.

Et specialtilfælde af hans resultater er følgende *struktursætning*, som er en generalisation af resultaterne i kapitel 3. Antag, at $\boldsymbol{u}$ opfylder en ligning af formen

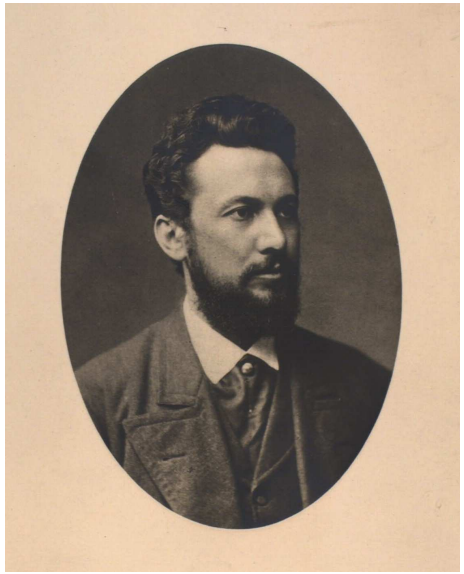
$$(\boldsymbol{u} - r_1) \cdot (\boldsymbol{u} - r_2) \cdots (\boldsymbol{u} - r_n) = 0,$$

hvor $r_1, r_2, \ldots, r_n$ er n forskellige reelle tal. Man kan da til ethvert hyperkomplekst tal af formen (64) knytte et koordinatsæt med n reelle koordinater $(m_1, \cdots, m_n)$, således at *addition og multiplikation med hyperkomplekse tal svarer til koordinatvis addition og multiplikation af koordinatsættene* $(m_1, \cdots, m_n)$.

Man kan altså sige, at talsystemet har struktur som R^n med koordinatvis addition og multiplikation.

Julius Petersen

Det var ikke kun i England, at man studerede triplets i årene efter opdagelsen af kvaternionerne. I Danmark udgav Julius Petersen i 1885 en artikel, *Om algebraens Grundbegreber*, hvor han behandlede, hvad han kaldte *ternioner*. Disse ternioner var de samme som de triplets, Charles Graves havde beskrevet i 1844.



Peter Christian Julius Petersen blev født i 1839. Han afsluttede i 1860 første del af en uddannelse som civilingeniør, men valgte derefter matematik som sit hovedstudium. Sideløbende med sine matematikstudier underviste han i årene 1860-71 på en lærd skole, som svarer til nutidens gymnasium. I 1871 blev han ansat ved polyteknisk læreanstalt, det nuværende DTU, der var oprettet i 1829. Her virkede han frem til 1886, hvor han blev professor i matematik ved Københavns Universitet.

Hans hovedinteresse var geometrien, og i 1868 udkom første udgave af hans bog *Methoder og Theorier til Løsning af geome-*

triske Konstruktionsopgaver, som blev oversat til flere sprog og gjorde ham kendt i udlandet.

Inspireret af den artikel, som Weierstrass havde skrevet i 1884, udgav Julius Petersen i 1887 en artikel på tysk med titlen *Über n-dimensionale complexe Zahlen*. Her videreudvikler og omtaler han de metoder, som Weierstrass havde udviklet.

Som udgangspunkt arbejder han med n-dimensionale talsystemer med reelle koefficienter, og han opstiller formler svarende til (19) på side 17 for n-dimensionale tal, ligesom Study gør et par år senere.

I disse formler tillader han imidlertid komplekse koefficienter i modsætning til Weierstrass. Han inddrager nemlig også de komplekse rødder i de karakteristiske ligninger og kan altså altid faktorisere i førstegradspolynomier.

Det kan bemærkes, at *Om algebraens Grundbegreber* er værd at læse af flere grunde. For eksempel har han i forbindelse med sine eksempler på 3-dimensionale tal nogle overvejelser om algebraiske strukturer, som var helt nye på det tidspunkt.

Betegnelsen hyperkomplekse tal

Betegnelsen *complex numbers* blev udbredt i anden halvdel af 1800-tallet. Indtil da havde man talt om *imaginære tal*.

Navnet hyperkomplekse tal, på engelsk *hypercomplex numbers*, dukker op omkring år 1900. Indtil da var der blevet brugt forskellige betegnelser som for eksempel *systemer af komplekse tal* eller triplets for mere specifikke talsystemer.

Definitionen på, hvad der forstås ved hyperkomplekse tal, varierede og varierer stadig. Nogle tillader komplekse koefficienter, og ikke alle forudsætter eksistens af et gange-neutralt tal.

Hyperkomplekse talsystemer kaldes nu om dage oftest *endeligdimensionale algebraer*, eventuelt over R.

Wedderburns struktursætning

Det arbejde, der har haft størst betydning for forståelsen af hyperkomplekse tal, er uden tvivl artiklen *On Hypercomplex Numbers* fra 1907 skrevet af Joseph Wedderburn (1882–1948). De første linjer af hans artikel er vist nedenfor.

ON HYPERCOMPLEX NUMBERS

By J. H. Maclagan Wedderburn.

(*Communicated by* W. Burnside.)

[Received July 7th, 1907.—Read November 14th, 1907.]

På trods af titlen handler Wedderburns artikel om mere omfattende mængder end de hyperkomplekse tal. For eksempel forudsætter han ikke, at der er et neutralt element ved multiplikation. Han talte ikke om et talsystem men om en *algebra*.

I modsætning til Weierstrass, der i sin struktursætning kun så på de kommutative talsystemer, ser Wedderburn også på de ikke-kommutative talsystemer, og han kommer frem til en udvidelse af Weierstrass struktursætning.

For et givet naturligt tal n og en given divisionsalgebra over R, altså R, C eller H, kan man se på samtlige $n \times n$ matricer med indgange tilhørende divisionsalgebraen. En sådan mængde af matricer kaldes en *fuld matrixalgebra*. Wedderburn viste, at en omfattende klasse af talsystemer, kan splittes op i komponenter, der hver for sig har struktur som en fuld matrixalgebra. På denne måde blev sammenhængen mellem hyperkomplekse tal og matricer for alvor tydelig.

OPGAVER

Tal i to dimensioner

1. Udregn $(3-\boldsymbol{u})(5+4\boldsymbol{u})$ og $(3-\boldsymbol{u})^3$ på formen $x+y\boldsymbol{u}$, når der gælder, at $\boldsymbol{u}^2 = 2+\boldsymbol{u}$.

2. Antag, at $\boldsymbol{u}^2 = 2+\boldsymbol{u}$. Bestem ortogonale idempotente tal $\boldsymbol{p}_1$ og $\boldsymbol{p}_2$ med sum 1 og reelle tal r_1 og r_2, så $\boldsymbol{u} = r_1\boldsymbol{p}_1 + r_2\boldsymbol{p}_2$.

Find s og t, så $3-\boldsymbol{u} = s\boldsymbol{p}_1 + t\boldsymbol{p}_2$, og udregn $(s\boldsymbol{p}_1 + t\boldsymbol{p}_2)^3$ dels som linearkombination af $\boldsymbol{p}_1$ og $\boldsymbol{p}_2$, dels på formen $x+y\boldsymbol{u}$.

3. I denne opgave udledes egenskaber ved Fibonacci-tallene ved hjælp af hyperkomplekse tal $x+y\boldsymbol{u}$, hvor $\boldsymbol{u}^2 = 1+\boldsymbol{u}$.

Potenserne $\boldsymbol{u}^n$ kan krives på formen $k_n + a_n\boldsymbol{u}$, hvor k_n og a_n er reelle tal og n er et naturligt tal.

Angiv a_1 og a_2, og gør rede for, at $\boldsymbol{u}^{n+2} = \boldsymbol{u}^{n+1} + \boldsymbol{u}^n$, d.v.s. at

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n. \tag{66}$$

Vis, at $\boldsymbol{u}^2 - \boldsymbol{u} - 1 = (\boldsymbol{u} - r_1)\cdot(\boldsymbol{u} - r_2)$, hvor

$$r_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{5}}{2}, \qquad r_2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{5}}{2}.$$

Skriv $\boldsymbol{u}$ på formen $r_1\boldsymbol{p}_1 + r_2\boldsymbol{p}_2$, hvor $\boldsymbol{p}_1$ og $\boldsymbol{p}_2$ er to ortogonale idempotente tal.

Find koefficienten til $\boldsymbol{u}$ i $(r_1\boldsymbol{p}_1 + r_2\boldsymbol{p}_2)^n$, og udled Binets formel

$$\boxed{a_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{\sqrt{5}}.} \tag{67}$$

Udregn til sidst a_8 ved brug af (67) på et cas-værktøj, altså uden først at beregne a_3 og a_4.

Tal i tre dimensioner

4. Udregn produktet $(2-3\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^2)\cdot(1+4\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{u}^2)$, så det får formen $x+y\boldsymbol{u}+z\boldsymbol{u}^2$, når $\boldsymbol{u}^3 = 4-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^2$.

5. Udregn $\boldsymbol{u}^4$ på formen $x+y\boldsymbol{u}+z\boldsymbol{u}^2$, når der om $\boldsymbol{u}$ gælder, at $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}-1)\cdot(\boldsymbol{u}-2) = 0$.

6. Se på 3-dimensionale tal $\boldsymbol{a} = x+y\boldsymbol{u}+z\boldsymbol{u}^2$, hvor $\boldsymbol{u}^3 = \boldsymbol{u}$.

Find parvis ortogonale idempotente $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ og $\boldsymbol{p}_3$ med sum 1.

Skriv $x+y\boldsymbol{u}+z\boldsymbol{u}^2$ på formen $m_1\boldsymbol{p}_1 + m_2\boldsymbol{p}_2 + m_3\boldsymbol{p}_3$, og angiv hvert m_i udtrykt ved x, y og z.

Angiv x, y og z udtrykt ved m_1, m_2 og m_3.

Udregn $(2+3\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^2)^5$ på formen $x+y\boldsymbol{u}+z\boldsymbol{u}^2$ ved at omskrive til udtryk af formen $m_1\boldsymbol{p}_1 + m_2\boldsymbol{p}_2 + m_3\boldsymbol{p}_3$.

7. Vis, hvordan man kan udregne $(2+3\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^2)^5$ ved brug af polynomiers division på et cas-værktøj, når $\boldsymbol{u}^3 = \boldsymbol{u}$.

8. Formler af samme type som (19) har man brugt i forbindelse med polynomier siden slutningen af 1700-tallet. I denne opgave illustreres det ved at se på andengradspolynomier.

Hvis x_1, x_2 og x_3 er tre forskellige tal, defineres for $i = 1,2,3$ andengradspolynomier $p_i(x)$ således

$$p_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{68}$$

Gør rede for, at grafen for følgende andengradspolynomium $L(x)$ går gennem punkterne (x_1, y_1), (x_2, y_2) og (x_3, y_3)

$$L(x) = y_1p_1(x) + y_2p_2(x) + y_3p_3(x).$$

Polynomiet kaldes *Lagrange polynomiet* for de givne punkter.

Opstil forskriften for det Lagrange polynomium, der hører til punkterne (-1,3), (2,1) og (4,5). Tegn grafen og punkterne.

Matricer

9. Eftervis, at den distributive lov $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ gælder for 2×2 matricer.

10. Lad $\boldsymbol{U}$ være den symmetriske matrix, der er vist nedenfor.

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestem to ortogonale idempotente matricer $\boldsymbol{P}_1$ og $\boldsymbol{P}_2$ med sum $\boldsymbol{E}$ og to tal r_1 og r_2, så $\boldsymbol{U} = r_1\boldsymbol{P}_1 + r_2\boldsymbol{P}_2$.

Beregn matricen $\boldsymbol{V} = r_1^{-1}\boldsymbol{P}_1 + r_2^{-1}\boldsymbol{P}_2$.

Gør rede for, at $\boldsymbol{UV} = \boldsymbol{VU} = \boldsymbol{E}$, altså at $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}^{-1}$.

Bestem to ortogonale idempotente matricer $\boldsymbol{P}_1$ og $\boldsymbol{P}_2$ og to tal r_1 og r_2, så $\boldsymbol{U} = r_1\boldsymbol{P}_1 + r_2\boldsymbol{P}_2$, når man i $\boldsymbol{U}$ erstatter 12 og 4 med 9 og 1, og vis, at man her ikke kan finde $\boldsymbol{V}$, så $\boldsymbol{UV} = \boldsymbol{VU} = \boldsymbol{E}$.

11. Lad $\boldsymbol{U}$ og $\boldsymbol{V}$ være matricer med følgende form:

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

Bestem a_3, a_2, a_1 og a_0, så $\boldsymbol{U}^4 = a_3\,\boldsymbol{U}^3 + a_2\,\boldsymbol{U}^2 + a_1\,\boldsymbol{U} + a_0\,\boldsymbol{E}$.

Bestem fire parvis ortogonale idempotente matricer $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_4$ med sum $\boldsymbol{E}$ og reelle tal $r_1, \cdots, r_4$, så

$$\boldsymbol{U} = r_1\boldsymbol{P}_1 + r_2\boldsymbol{P}_2 + r_3\boldsymbol{P}_3 + r_4\boldsymbol{P}_4.$$

Vis, at man med de samme $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_4$ kan finde $s_1, \cdots, s_4$, der afhænger af a, b, c og d, så

$$\boldsymbol{V} = s_1\boldsymbol{P}_1 + s_2\boldsymbol{P}_2 + s_3\boldsymbol{P}_3 + s_4\boldsymbol{P}_4,$$

for alle a, b, c og d, og angiv $s_1, \cdots, s_4$ udtrykt ved a, b, c og d.

Diagonalisering

12. Lad $\boldsymbol{U}$ være en matrix som nedenfor:

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Vis at der findes en matrix $\boldsymbol{Q}$, der diagonaliserer samtlige matricer $\boldsymbol{U}$ af denne type.

13. Lad $\boldsymbol{U}$ være den symmetriske matrix, der er vist nedenfor.

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 10 & 5 & 8 \\ -2 & 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

Bestem x, y og z, så $\boldsymbol{U}^3 = x\,\boldsymbol{U}^2 + y\,\boldsymbol{U} + z\,\boldsymbol{E}$.

Bestem en matrix $\boldsymbol{Q}$ og en diagonalmatrix $\boldsymbol{D}$, som opfylder, at $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{UQ} = \boldsymbol{D}$.

14. Hvis $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er to søjlevektorer med n koordinater, kan prikproduktet $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ udregnes som matrixproduktet $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$.

Brug dette til at vise, at hvis $\boldsymbol{Q}$ er en ortogonalmatrix, så er prikproduktet $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ lig med prikproduktet $\boldsymbol{Qa} \cdot \boldsymbol{Qb}$.

15. Vis, at en symmetrisk 2×2 matrix $\boldsymbol{P}$ er idempotent med proportionale søjler, netop hvis der er reelle tal a og b, hvor $a^2 + b^2 = 1$, så

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

I artiklen *A note on primitive idempotent elements of a total matrix algebra* fra 1931 behandler F. S. Nowlan symmetriske idempotente $n \times n$ matricer med proportionale søjler. Han viser blandt andet, at en matrix $\boldsymbol{M}$ med indgange m_{ij} er af denne type, netop hvis der findes reelle tal $a_1, \cdots, a_n$, hvor $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, så $m_{ij} = a_i a_j$ for alle i og j.

Anvendelser

16. Find en ligning for symmetriakserne og bestem halvakserne længde for ellipsen med ligningen

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36.$$

Få ellipsen tegnet ved at opfatte ligningen ovenfor som en andengradsligning med y som ubekendt og bruge den sædvalige formel til løsning af andengradsligninger til at få to funktioner, hvor y er en funktion af x, således at graferne for de to funktioner tilsammen giver ellipsen.

Bestem koordinaterne til de punkter på ellipsen, hvor der er lodret tangent.

17. I artiklen *Symmetric Matrices with Prescribed Eigenvalues and Eigenvectors* fra 1982 giver K. J. Heuvers en metode til at konstruere symmetriske $n \times n$ matricer, der har egenværdier og egenvektorer med pæne tal, hvilket er meget nyttigt når man konstruerer opgaver inden for dette område.

I tilfældet $n = 3$ er metoden denne: Lad $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ være en vilkårlig ortonormal basis for R^3. Givet 3 reelle tal r_1, r_2 og r_3 kaldes det mindste af de tre tal for r. Sæt $m_i = \sqrt{r_i - r}$, og $\boldsymbol{b}_i = m_i \boldsymbol{v}_i$ for $i = 1, 2, 3$. Hvis $\boldsymbol{B}$ er matricen $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_1 \,|\, \boldsymbol{b}_2 \,|\, \boldsymbol{b}_3)$, og $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' + r\,\boldsymbol{E}$, da er $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ og $\boldsymbol{v}_3$ egenvektorer for $\boldsymbol{S}$ og tallene r_i er de tilhørende egenværdier for $\boldsymbol{S}$.

Metoden kan illustreres ved dels at vælge $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ og $r_3 = 6$, og dels vælge tre parvis ortogonale vektorer $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ og $\boldsymbol{w}_3$, hvor $\boldsymbol{w}_1 = (1, -1, 0)$, $\boldsymbol{w}_2 = (1, 1, 1)$, og $\boldsymbol{w}_1$ er krydsproduktet af de to: $\boldsymbol{w}_3 = (-1, -1, 2)$.

Brug Heuvers-metoden til at finde en symmetrisk matrix $\boldsymbol{U}$ med egenværdierne r_i og egenvektorer $\boldsymbol{w}_i$.

Matematikhistorie

18. Denne opgave tager udgangspunkt i Julius Petersens artikel *Om Algebraens Grundbegreber* fra 1885. Her indfører han to nye tal α og β og ser på udtryk af formen $x + \alpha y + \beta z$, hvor x, y og z er reelle tal. Et sådant udtryk kalder han en *ternion*.

I forbindelse med multiplikation af ternioner går han over til at se på et konkret eksempel, hvor $\beta = \alpha^2$ og $\alpha \cdot \beta = 1$, det vil sige, at $\alpha^3 = 1$. Kalder man istedet α for $\boldsymbol{u}$, og placerer man koefficienterne y og z forrest, har man altså ternioner af formen $x + y\,\boldsymbol{u} + z\,\boldsymbol{u}^2$ hvor $\boldsymbol{u}^3 = 1$. I artiklen står følgende:

> Vi faa nu
>
> $$(x + \alpha y + \beta z)(x_1 + \alpha y_1 + \beta z_1) = X + \alpha Y + \beta Z,$$
>
> hvor
>
> $$\left.\begin{array}{rcl} X &=& xx_1 + yz_1 + zy_1 \\ Y &=& xz_1 + yy_1 + zx_1 \\ Z &=& xy_1 + yx_1 + zz_1. \end{array}\right\}$$

Eftervis disse formler ved udregne

$$(x + y\,\boldsymbol{u} + z\,\boldsymbol{u}^2) \cdot (x_1 + y_1\,\boldsymbol{u} + z_1\,\boldsymbol{u}^2),$$

som $x_2 + y_2\,\boldsymbol{u} + z_2\,\boldsymbol{u}^2$, hvor x_2, y_2 og z_2 er udtrykt ved x, y, z, x_1, y_1 og z_1, når $\boldsymbol{u}^3 = 1$, og bemærk at der er sket en fejl ved opsætningen af artiklen, idet højresiderne for Y og Z er byttet om. Det har imidlertid ikke betydning for artiklen i øvrigt, hvor X og Y og Z indgår symmetrisk.

Udnyt for eksempel, at $(1, 1, 1)$ er neutralt ved koordinatvis multiplikation i R^3, til at vise, at ternionerne, hvor $\boldsymbol{u}^3 = 1$, ikke kan have struktur som $(R^3, +, \cdot)$.

Indeks

algebra, 54
algebraens fundamentalsætning, 48
associative lov, 7

basis, 10

determinant, 31, 45
diagonalisering, 33
diagonalmatrix, 26
distributive lov, 7
divisionsalgebra, 50
dobbelttal, 10

egenvektor, 20, 34
egenværdi, 20, 34
elliptisk paraboloide, 42
endelig-dimensionale algebraer, 53

Fibonacci, 55
Frobenius, 50
fuld matrixalgebra, 54

Graves, 49
grundlæggende regneregler, 7

Hamilton, 48
Hessematrix, 41

idempotente, 49
indgang, 23
invers matrix, 32, 45
invertibel matrix, 32
invertibelt tal, 9

Julius Petersen, 52

karakteristisk ligning, 14, 16, 36, 47
kommutative lov, 7
komplekse tal, 9
koordinatvis multiplikation, 13, 20

Lagrange polynomiet, 56
lineært uafhængige, 32

matrix, 23, 45

nilpotente, 49
nulreglen, 8

ortogonale tal, 11
ortogonalmatrix, 35
overgangsmatrix, 37

Peirce, Benjamin, 49
projektion, 19

række-søjle multiplikation, 24

Study, Eduard, 50
sum af matricer, 24
symmetrisk matrix, 26, 35

ternioner, 52
transponering, 26
triplets, 48

vektor, 10

Wedderburn, 54
Weierstrass, 50