Aksel Bertelsen

UDFORSKNING AF EN ALGEBRAISK STRUKTUR

Om Alfred Youngs arbejder

Version 1, marts 2022.

Indhold

INDLEDNING

I anden halvdel af 1800-tallet begyndte matematikere at arbejde med en række nye objekter og tilhørende regneoperationer. Som eksempler på sådanne objekter kan nævnes *kvaternioner* og *matricer*. Man kan sige, at man interesserede sig for nye *algebraiske strukturer*, idet en algebraisk struktur $(M, \cdot)$ er en mængde M med en regneoperation også kaldet en *komposition*, der til to elementer a og b i M knytter et element $a \cdot b$ i M.

Mange af disse nye regneoperationer blev kaldt *produkter*, selvom de i modsætning til de traditionelle produkter af tal *ikke* var *kommutative*, og selvom for eksempel nulreglen ikke gjaldt.

Ofte var produkterne ret komplicerede og meget forskning gik ud på at prøve at forenkle dem. For at illustrere principperne bag en sådan forenkling ses dog først på et ikke særlig kompliceret produkt. I mængden af talpar i R^2 kan man indføre produktet

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Produktet kan forenkles ved til hvert (x_1, x_2) at knytte talparret

$$(s_1, s_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2),$$

som vi kalder $f(x_1, x_2)$. Man kan nemlig regne efter, at hvis $f(x_1, x_2)$ er lig med (s_1, s_2), og $f(y_1, y_2)$ er lig med (t_1, t_2), så vil $f((x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2))$ være lig med $(s_1 t_1, s_2 t_2)$. Definerer man derfor et nyt produkt således:

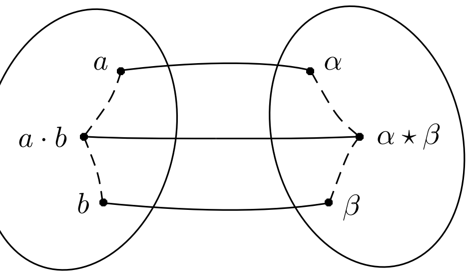
$$(s_1, s_2) \star (t_1, t_2) = (s_1 t_1, s_2 t_2),$$

så får man en ny algebraisk struktur, som i en vis forstand er magen til den oprindelige. Det er imidlertid lettere at studere produktets egenskaber i den nye form, hvor det f.eks. umiddelbart er klart, at nulreglen ikke gælder, da $(1, 0) \star (0, 1) = (0, 0)$.

At to algebraiske strukturer $(M_1, \cdot)$ og $(M_2, \star)$ er ens betyder, at der findes en bijektiv afbildning f fra M_1 til M_2, således at

$$f(a \cdot b) = f(a) \star f(b).$$

Man siger også, at de to strukturer er *isomorfe*. Man kalder f en *isomorfi*, og den kan illustreres med en pilefigur som vist nedenfor, hvor $f(a) = \alpha$ og $f(b) = \beta$.



Blandt de vigtigste af de nye algebraiske strukturer var nogle, hvor ojekterne blev konstrueret ved hjælp af permutationer af en endelig mængde. Som eksempel ser vi på permutationer af mængden $\{1, 2, 3\}$, altså bijektive afbildninger af mængden på sig selv. Der er seks af den slags permutationer, og vi tænker os, at de nummereres $P_1, \ldots, P_6$. Ved produktet $P_i P_j$ af to permutationer forstås den sammensatte afbildning $P_i \circ P_j$, som igen er en af de seks permutationer. Dette produkt kan udvides til produkter af linearkombinationer

$$(x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_6 P_6)(y_1 P_1 + y_2 P_2 + \cdots + y_6 P_6),$$

hvor koefficienterne x_i og y_i til P_i er tal. Et sådant produkt udregnes ved at gange parenteser ud på sædvanlig facon. Man får 36 led af formen $x_i y_j P_i P_j$, og da $P_i P_j$ er en permutation P_k, vil summen af de 36 led igen være en linearkombination af de seks permutationer.

Fra omkring år 1900 var der især to matematikere, der bidrog til forståelsen af produkter af denne type, nemlig Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) i Tyskland og Alfred Young (1873–1940) i England. De kom begge på hver sin måde frem til, at produktet i eksemplet har struktur som et produkt i mængden bestående af elementer (s_1, M, s_2), hvor s_1 og s_2 er tal, og M er en 2×2 matrix, og hvor man ganger komponentvis, altså så

$$(s_1, M, s_2)(t_1, N, t_2) = (s_1 t_1, MN, s_2 t_2),$$

hvor MN er det sædvanlige matrixprodukt ved række-søjle multiplikation. Det er meget nemmere at arbejde med elementer af formen (s_1, M, s_2) end med linearkombinationer $\sum x_i P_i$ både i forbindelse med konkrete udregninger af produkter og ved udledning af algebraiske egenskaber ved produktet.

Det er Youngs fremgangsmåde, som det følgende handler om. Fordelen ved den er, at man kommer frem til en eksplicit isomorfi

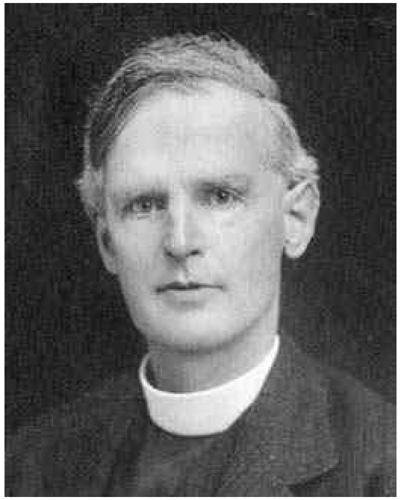
$$f: \; x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_6 P_6 \; \to \; (s_1, M, s_2)$$

så man forholdsvis direkte kan beregne overgangen fra den ene struktur til den anden.

Om Alfred Young

Alfred Young arbejdede både som matematiker og præst. Han begyndte som nittenårig i 1892 at læse matematik på Clare College på Cambridge University, hvor han i øvrigt også var en god roer. Fra 1901 til 1905 var han ansat på Selwyn College, der er vist på forsidebilledet. Han blev gift i 1907 og det følgende år præsteviet. Fra 1910 var han sognepræst i Birdbrook, Essex, hvor han boede resten af sit liv, det meste af tiden som præst og fritidsmatematiker. I en periode fra 1926 holdt Young dog igen forelæsninger på Cambridge.

De af Youngs matematiske arbejder, der fik størst betydning, var ni artikler med fællestitlen *On quantitative substitutional analysis*. De tre første, der er fra henholdsvis 1901, 1902 og 1927, indeholder alle de centrale ideer.



Da Youngs første artikel blev udgivet, så Frobenius sammenhængen med sit eget arbejde, og brugte Youngs nye metoder i en artikel i 1903. Blandt andet på grund af vanskeligheder med at læse tysk gik der mange år, før Young fuldt ud forstod Frobenius, men i 1927 udgav Young sin tredje artikel, hvor han havde forbedret sin metode, således at han kunne give en alternativ udledning af nogle af de resultater, som Frobenius var nået frem til. Young var glad over interessen fra Frobenius, og skrev i 1926: *I am delighted to find some one else really interested in the matter. The worst of modern mathematics is that it is so extensive that one finds there is only about one person in the universe really interested in what you are.*

Citatet og de øvrige oplysninger er fra H. W. Turnbulls mindeord om Young fra 1941.

1. ALGEBRAER

I mængden R^m af talsæt $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ har man to regneoperationer, der gør R^m til et vektorrum, nemlig addition og multiplikation med en skalar, altså et reelt tal. De udføres begge koordinatvist, dvs. addition foretages således

$$(x_1, \cdots, x_m) + (y_1, \cdots, y_m) = (x_1 + y_1, \cdots, x_m + y_m),$$

og multiplikation med et tal λ foretages således

$$\lambda(x_1, \cdots, x_m) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_m).$$

Talsæt angives med store bogstaver, og en sum af to talsæt X og Y skrives $X + Y$, mens λ gange X skrives λX. Talsæt vil også ind i mellem blive kaldt vektorer, når man arbejder med begreber fra vektorregning.

Produktets egenskaber

Vi vil interessere os for multiplikation af to talsæt i R^m, hvor produktet igen er et talsæt i R^m. Der bliver i praksis arbejdet med flere forskellige slags. Et produkt i R^m bliver nemmest at arbejde med, hvis det har et passende samspil med addition og multiplikation med tal. Det betyder, at produktet skal opfylde den *distributive* lov

$$X(Y + Z) = XY + XZ, \tag{1}$$

og den tilsvarende, hvor faktorerne er byttet om. Desuden skal der gælde, at

$$X(\lambda Y) = (\lambda X)Y = \lambda(XY) \tag{2}$$

for alle X, Y og alle reelle tal λ.

Det mest oplagte produkt er koordinatvis multiplikation. Det er let at udregne, men det er andre produkter, der bliver arbejdet mest med. Det bemærkes, at prikproduktet ikke giver et resultat, der tilhører R^m, da det giver et enkelt tal.

Vi vil se på multiplikationer, der så vidt muligt har samme egenskaber, som når man ganger reelle tal. Det betyder f.eks., at man gerne vil have, at den *associative* lov er opfyldt, dvs. at der for alle X, Y og Z gælder, at:

$$(XY)Z = X(YZ). \tag{3}$$

Man kan så undlade parenteser og bare skrive XYZ. Krydsproduktet af vektorer i rummet opfylder ikke denne lov.

Et vektorrum med et produkt med egenskaberne (1), (2) og (3) kaldes en *algebra*, og vektorerne kaldes her oftest *elementer*.

Vi kommer stort set kun til at beskæftige os med algebraer, hvor der er et neutralt element E, altså et element E, som opfylder, at $XE = EX = X$ for alle elementer X.

Produktet behøver ikke at opfylde den *kommutative* lov, der behøver altså ikke at gælde, at $XY = YX$ for alle X og Y.

Det behøver heller ikke være sådan, at man kan *dividere* med ethvert element A forskelligt fra 0. At man kan dividere med A betyder i en algebra med et neutralt element E, at der findes et element X så $AX = XA = E$. Der kan højst være én løsning, og den betegnes A^{-1}. Når A^{-1} eksisterer, kaldes A *invertibelt*, og enhver ligning $AX = B$ vil have løsningen $X = A^{-1}B$.

Kan man dividere med ethvert element forskelligt fra 0, taler man om en *divisionsalgebra*. I en divisionsalgebra vil *nulreglen* gælde, det vil sige, at hvis et produkt AB er 0, så er enten A eller B lig 0. Hvis $AB = 0$ og A ikke er 0, kan man nemlig gange fra venstre med A^{-1} på begge sider, så man får $B = 0$.

I en algebra, der ikke er en divisionsalgebra, gælder nulreglen ikke nødvendigvis.

Eksempler på algebraer

De komplekse tal udgør en divisionsalgebra, hvor produktet er kommutativt. Tallet $x_1 + ix_2$ kan identificeres med talsættet (x_1, x_2) i R^2, og multiplikationen bliver

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Disse tal har man arbejdet med siden 1500-tallet. I løbet af 1800-tallet begyndte man at lede efter algebraer med egenskaber som de komplekse tal, men i højere dimension.

Hamilton (1805-1865) fandt *kvaternionerne* i 1843. De udgør et 4-dimensionalt vektorrum, og tallene skrives normalt på formen $x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$. Uden her at komme nærmere ind på hvordan man ganger, skal bemærkes at produktet ikke er kommutativt, men at man har en divisionsalgebra.

Man begyndte også at arbejde med matricer, som man ganger med hinanden ved række-søjle multiplikation:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 + x_2y_3 & x_1y_2 + x_2y_4 \\ x_3y_1 + x_4y_3 & x_3y_2 + x_4y_4 \end{pmatrix}.$$

Matricer som dem ovenfor kan identificeres med talsæt i R^4, og matrixproduktet bliver derved også et produkt i R^4.

Disse produkter giver algebraer, der ikke er kommutative. De er heller ikke divisionsalgebraer. F.eks. er matricen længst til venstre i ligningen nedenfor ikke invertibel. Ligningen har nemlig ingen løsninger, da produktet på venstresiden vil give en matrix med 0 i nederste række.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hvis tallene (x_1, x_2, x_3, x_4) tillades at variere frit, taler man om en *fuld matrixalgebra*, og disse matrixalgebraer spiller en central rolle i de senere kapitler.

Produkternes form

I alle eksemplerne har produktet XY haft form af et talsæt, hvor hver koordinat er en linearkombination af led af formen x_iy_j, dvs. koordinat k har formen $\sum \gamma_{ijk}x_iy_j$, hvor der summeres over alle i og j. Dette er tilfældet generelt i en algebra, hvilket kan indses på følgende måde.

Det talsæt i R^m, der har 1 som koordinat i og 0 ellers, kaldes E_i. Et vilkårligt talsæt $X = (x_1, \ldots, x_m)$ kan skrives som en linearkombination af $E_1, \ldots, E_m$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_m(0, \ldots, 0, 1).$$

På denne måde kan et produkt XY af X og Y skrives

$$(x_1E_1 + x_2E_2 + \cdots + x_mE_m)(y_1E_1 + y_2E_2 + \cdots + y_mE_m).$$

Ganges ud og bruges (1) og (2), får man, at produktet er en sum af led af formen $x_iy_jE_iE_j$. Da E_iE_j igen ligger i R^m, kan det skrives som en linearkombination af E_k'erne:

$$E_iE_j = \gamma_{ij1}E_1 + \gamma_{ij2}E_2 + \cdots + \gamma_{ijm}E_m.$$

Produktet XY er altså en sum af led af formen $\sum \gamma_{ijk}x_iy_jE_k$, hvor der summeres over alle i, j og k. Koordinat nummer k er summen af koefficienterne til E_k, som er $\sum \gamma_{ijk}x_iy_j$, hvor der kun summeres over i og j.

Det ses, at produktet er helt bestemt ved værdierne af E_iE_j udtrykt ved E_k'erne.

Produktets form gør, at afbildninger $X \to AX$ og $X \to XA$ for fast A vil være lineære afbildninger, og man taler derfor om et *bilineært* produkt.

Efter denne generelle introduktion til algebraer ses nu på de konkrete algebraer, som Young interesserede sig for, og som involverer permutationer.

Permutationer

Mængden af permutationer af tallene $1, 2 \ldots, n$, altså mængden af bijektive afbildning af disse tal på sig selv, kaldes S_n. Ved produktet PQ af to permutationer P og Q forstås den sammensatte afbildning $P \circ Q$. Produktet opfylder den associative lov, da loven gælder for sammensætning af afbildninger. Der er et neutralt element P_1, der svarer til den identiske afbildning, og til enhver permutation P findes en invers P^{-1}, så $PP^{-1} = P^{-1}P = P_1$. Disse egenskaber gør S_n til en *gruppe*, som kaldes den symmetriske gruppe.

Permutationsgruppen S_3

Som gennemgående eksempel vil vi se på S_3, der består af 6 permutationer, og vi nummererer dem således:

$$P_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_5 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_6 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Man kan opstille en *kompositionstavle*, der viser resultaterne af samtlige mulige multiplikationer:

$\circ$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_2	P_2	P_1	P_6	P_5	P_4	P_3
P_3	P_3	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2
P_4	P_4	P_3	P_2	P_1	P_6	P_5
P_5	P_5	P_6	P_1	P_2	P_3	P_4
P_6	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1

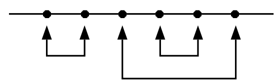
(4)

Det bemærkes, at alle rækker og søjler indeholder $P_1, P_2, \ldots P_6$ blot i forskellig rækkefølge.

For nemmere at kunne huske kompositionstavlen kan man beskrive visuelt, hvad der sker, når man ganger med permutationerne fra venstre. De 6 permutationer markeres med punkter på en linje, så P_1 svarer til det første punkt, P_2 til det næste osv.

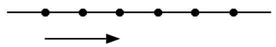
Vi ser først på den afbildning, der består i at gange med P_2 fra venstre. Sammenlignes række 1 med række 2 ses, at P_2P_i giver den permutation, som man får ved på figuren nedenfor at følge pilen fra P_i. F.eks. har man $P_2P_3 = P_6$.

$$P_i \to P_2P_i$$

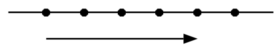


Når man ganger med P_3 fra venstre, bliver resultatet den permutation, som man får ved at gå to pladser til højre på figuren nedenfor til venstre. Når man ganger med P_5 fra venstre, bliver resultatet den permutation, som man får ved at gå fire pladser til højre på figuren nedenfor til højre, eller m.a.o. to pladser til venstre.

$$P_i \to P_3P_i$$

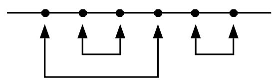


$$P_i \to P_5P_i$$

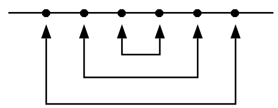


På samme måde giver P_4 og P_6 figurerne nedenfor.

$$P_i \to P_4P_i$$



$$P_i \to P_6P_i$$



Endelig svarer P_1 til en figur, hvor alle punkter bliver liggende.

Da $P_iP_1 = P_i$ vil multiplikation med P_i fra venstre svare til den figur, hvor P_1 afbildes over i P_i.

Algebraen A_n

Samtlige linearkombinationer af permutationerne i S_n udgør et vektorrum, der betegnes A_n. De $m = n!$ permutationer nummereret $P_1, \dots, P_m$ i en tilfældig valgt rækkefølge udgør en basis, så dimensionen af A_n er m. Et produkt

$$(x_1 P_1 + \cdots + x_m P_m)(y_1 P_1 + \cdots + y_m P_m)$$

udregnes ved løst sagt at gange parenteser ud, så man får en sum af udtryk af formen $x_i y_j P_i P_j$. En sådan sum er en linearkombination af permutationerne P_k, så vi får altså et produkt, der igen ligger i A_n. Hvis faktorerne er X og Y skrives produktet XY.

Dette produkt gør A_n til en algebra, da lovene (1), (2) og (3) er opfyldt. F.eks. gælder den associative lov, da den gælder for produkt af permutationer. Endelig er den identiske permutation neutral som element i A_n.

Algebraen A_2

Der er to permutationer i S_2, nemlig den neutrale, P_1, og P_2, der ombytter 1 og 2. Der kan opstilles en generel formel for produktet af $X = x_1 P_1 + x_2 P_2$ og $Y = y_1 P_1 + y_2 P_2$ i A_2. Vi får:

$$XY = x_1 y_1 P_1^2 + x_1 y_2 P_1 P_2 + x_2 y_1 P_2 P_1 + x_2 y_2 P_2^2.$$

Da $P_2^2 = P_1$, og P_1 er neutralt, giver dette, at

$$XY = (x_1 y_1 + x_2 y_2) P_1 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) P_2.$$

Man genkender produktet fra side 5. Som i alle andre A_n gælder nulreglen ikke, som følgende udregning viser

$$(P_1 + P_2)(P_1 - P_2) = P_1^2 - P_2^2 = P_1 - P_1 = 0.$$

Specielt får vi, at f.eks. $P_1 + P_2$ ikke er invertibelt, og at algebraen altså ikke er en divisionsalgebra.

Algebraen A_3

I A_3 kan produkter være besværlige at udregne i hånden, da det kan kræve udregning af 36 led af typen $x_i y_j P_i P_j$, men hvis der kun er få led i linearkombinationerne, er arbejdet ikke så stort som i følgende eksempel, hvor

$$X = 3P_2 + 4P_3, \qquad Y = 2P_2 + P_5 - P_6.$$

Ved udregning af XY får man seks led:

$$\begin{aligned} XY &= 6P_1 + 3P_4 - 3P_3 + 8P_4 + 4P_1 - 4P_2 \\ &= 10P_1 - 4P_2 - 3P_3 + 11P_4. \end{aligned}$$

For at udlede egenskaber ved produktet kan det være nyttigt, at have det skrevet eksplicit. Sæt $Z = XY$, og lad z_i være koefficienten til P_i i Z. Da er

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_5 + x_4y_4 + x_5y_3 + x_6y_6 \\ z_2 &= x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_6 + x_4y_3 + x_5y_4 + x_6y_5 \\ z_3 &= x_1y_3 + x_2y_6 + x_3y_1 + x_4y_2 + x_5y_5 + x_6y_4 \\ z_4 &= x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_2 + x_4y_1 + x_5y_6 + x_6y_3 \\ z_5 &= x_1y_5 + x_2y_4 + x_3y_3 + x_4y_6 + x_5y_1 + x_6y_2 \\ z_6 &= x_1y_6 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_5 + x_5y_2 + x_6y_1 \end{aligned}$$

Hvis søjle 3 og 5 byttes om, så er y-søjlerne lig med rækkerne i kompositionstavlen (4) for P_i'erne, blot med y i stedet for P.

Det kan være en fordel at skrive elementerne i A_3 som talsæt $(x_1, x_2, \dots, x_6)$ i R^6 i stedet for som linearkombination $\sum x_i P_i$. Produktet XY bliver så $(z_1, z_2, \dots, z_6)$, hvor z_i udregnes ved formlerne ovenfor.

Formålet med det efterfølgende er at forenkle produktet, så det ikke bare er lettere at udregne produktet, men også lettere f.eks. at afgøre om et element er invertibelt.

2. DEKOMPOSITION

Ved et *underrum* i algebraen A_n forstås en mængde B af vektorer, som er stabil ved addition og multiplikation med tal. Et underrum udgør i sig selv et vektorrum.

Et underrum B i A_n kaldes en *sub-algebra*, hvis produktet af to vilkårlige elementer i B igen tilhører B. En sub-algebra er i sig selv en algebra. Ved *dimensionen* af B forstås dimensionen af B som underrum. Dimensionen er det mindste antal vektorer, der kan frembringe B.

Eksempel. I A_2 vil $P_1 + P_2$ frembringe en 1-dimensional sub-algebra B_1. Der gælder nemlig, at $(P_1 + P_2)^2 = 2(P_1 + P_2)$, så produktet af to elementer $\alpha(P_1 + P_2)$ og $\beta(P_1 + P_2)$, vil være $2\alpha\beta(P_1 + P_2)$. På samme måde vil $P_1 - P_2$ frembringe en sub-algebra B_2, der er 1-dimensional.

Ortogonale sub-algebraer

To elementer X og Y i A_n, for hvilke $XY = 0$ og $YX = 0$, kaldes *ortogonale*, og to sub-algebraer B_1 og B_2 kaldes ortogonale, hvis alle X og Y, hvor $X \in B_1$ og $Y \in B_2$, er ortogonale.

Antag nu, at A_n er en sum $B_1 + \cdots + B_N$ af N parvis ortogonale sub-algebraer $B_1, \ldots, B_N$. Ethvert par af elementer X og Y i A_n kan da skrives på formen

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, \qquad Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N,$$

hvor både X_i og Y_i tilhører B_i. Ganges de to højresider med hinanden, vil man få, at

$$XY = X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_NY_N. \tag{5}$$

Alle led af formen X_iY_j, hvor $i \neq j$, vil nemlig give 0, da X_i og Y_j er ortogonale. Man taler om, at man her har en *dekomposition* af produktet. Det er splittet op i en sum af produkter, som er simplere end det oprindelige forstået på den måde, at man i hvert produkt X_iY_i ganger elementer i vektorrum af lavere dimension end dimensionen af A_n.

Eksempel. I A_2 har man to ortogonale sub-algebraer B_1 og B_2 i eksemplet på forrige side, idet $P_1 + P_2$ og $P_1 - P_2$ er ortogonale, som vist på side 15. Ethvert element $X = x_1P_1 + x_2P_2$ i A_2 kan skrives som en sum af to elementer fra B_1 og B_2, da

$$X = (x_1 + x_2)\tfrac{1}{2}(P_1 + P_2) + (x_1 - x_2)\tfrac{1}{2}(P_1 - P_2).$$

Dette giver en dekomposition af produktet i A_2 som på side 5, hvis man sætter $s_1 = x_1 + x_2$ og $s_2 = x_1 - x_2$.

Neutrale elementer i B_i

Man kan udlede en række egenskaber, der er nyttige, når man skal finde en dekomposition. Først bemærkes, at

> Hvis A_n er en sum af N parvis ortogonale sub-algebraer $B_1, \cdots, B_N$, findes der elementer I_i, hvor $I_i \in B_i$, så
> $$P_1 = I_1 + I_2 + \cdots + I_N.$$

Elementet I_i vil være neutralt i B_i. For X_i i B_i gælder nemlig

$$X_i = X_iP_1 = X_i(I_1 + \cdots + I_N) = X_iI_i$$

ved brug af (5) på X_iP_1. Tilsvarende får man, at $X_i = I_iX_i$, så:

> Elementet I_i er neutralt i B_i.

Specielt gælder, at $I_iI_i = I_i$. Et element med denne egenskab kaldes *idempotent*. Vi får flere genge i det følgende brug for, at hvis $kX^2 = X$, så vil kX være idempotent.

Komponenterne X_i

Antag nu, at et element X i A_n er skrevet på formen

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, \tag{6}$$

hvor $X_i \in B_i$. Elementet X_i er lig med XI_i, idet (5) giver

$$XI_i = (X_1 + X_2 + \cdots + X_N)I_i = X_i I_i = X_i,$$

da X_i ligger i B_i, og I_i er neutral i B_i. Tilsvarende med $I_i X$, så

$$\boxed{X_i = XI_i = I_i X} \tag{7}$$

Heraf følger specielt, at ethvert element X kun kan skrives på én måde på formen (6). Elementerne X_i er derfor entydige, og X_i kaldes *komponenten* af X i B_i. Når man taler om at dekomponere et produkt XY, kan man sige, at det sker ved hjælp af en *dekomposition* af elementerne X og Y.

Af entydigheden følger også, at dimensionen af A_n er lig med summen af dimensionerne af $B_1, \ldots, B_N$. Baser for disse rum kan nemlig sammenstykkes til en basis for A_n.

Projektion på B_i

Af (7) følger, at afbildningen $f(X) = XI_i$ er en *projektion* af A_n på B_i. Da I_i er idempotent, afbildes XI_i nemlig over i sig selv:

$$f(XI_i) = XI_i I_i = XI_i.$$

Man kan sige, at I_i *frembringer* B_i forstået på den måde, at B_i er lig med samtlige elementer af formen XI_i, hvor $X \in A_n$:

$$B_i = \{\, XI_i \,|\, X \in A_n \}$$

Af dette følger, at $YZ \in B_i$ for alle $Y \in A_n$, hvis $Z \in B_i$. Tilsvarende med ZY, og B_i kaldes da en *invariant* sub-algebra.

Centrale idempotente

Af (7) ses, at elementerne I_i *kommuterer* med alle elementer i A_n, altså at $XI_i = I_i X$ for alle X i A_n. Et element i A_n kaldes *centralt*, hvis det kommuterer med alle elementer i A_n, så

$$\boxed{\text{Elementerne } I_i \text{ er centrale.}}$$

Et produkt af to centrale elementer X og Y er igen centralt, da

$$ZXY = XZY = XYZ$$

for alle $Z \in A_n$. En linearkombination af X og Y er også central, så samtlige centrale elementer udgør en sub-algebra. Denne sub-algebra kaldes *centrum* for A_n.

Fuldstændig dekomposition

Man kan altså forsøge, at dekomponere produktet i A_n ved at lede efter centrale idempotente elementer, der er indbyrdes ortogonale. I det følgende kapitel udledes generelle egenskaber ved centrum i A_n, og ved brug af disse egenskaber bestemmes centrale idempotente i A_3, der er indbyrdes ortogonale.

En dekomposition er optimal, hvis ingen af sub-algebraerne B_i kan dekomponeres videre. Dette er ensbetydende med, at ingen af de tilhørende centrale idempotente I_i kan skrives som en sum af to ortogonale centrale idempotente. Sådanne I_i kaldes *primitive* eller *irreducible*, og sub-algebraerne B_i kaldes *simple* eller *irreducible.*

Antallet af B_i i en dekomposition vil altid være mindre eller lig med dimensionen af centrum, da de tilhørende I_i er ortogonale. Hvis man kan bestemme dimensionen af centrum, og hvis man har en dekomposition, hvor antallet af B_i er lig med dimensionen af centrum, er dekompositionen altså optimal.

3. CENTRUM

Vi lader permutationerne i S_n være nummererede P_1, P_2,…, $P_{n!}$. At et element $X = \sum x_i P_i$ ligger i centrum for A_n, altså at XY er lig med YX for alle Y i A_n, er ensbetydende med, at

$$XP_k = P_k X \tag{8}$$

for alle P_k i S_n. Det er en nødvendig betingelse, men den er også tilstrækkelig, for hvis $Y = \sum y_i P_i$, giver den, at

$$XY = X \sum y_i P_i = \sum y_i X P_i = \sum y_i P_i X = YX.$$

Vi vil nu udlede, hvad der gælder om koefficienterne x_i i X, når (8) er opfyldt for alle P_k i S_n. Venstresiden af (8) er en sum af led af formen $x_i P_i P_k$, og for fast k vil permutationerne $P_i P_k$ gennemløbe S_n, når P_i gennemløber S_n. Tilsvarende er højresiden af (8) en sum af led af formen $x_j P_k P_j$, og for fast k vil permutationerne $P_k P_j$ gennemløbe S_n, når P_j gennemløber S_n. De to sider af lighedstegnet er ens, hvis de indeholder de samme led. Det betyder, at (8) er opfyldt, netop hvis $x_i = x_j$, når $P_i P_k = P_k P_j$.

To permutationer P_i og P_j kaldes *konjugerede*, hvis der findes en permutation P_k i S_n, så $P_i P_k = P_k P_j$. Vi har altså set, at

> Et element X i A_n er centralt, netop hvis ethvert par af konjugerede permutationer har samme koefficient i X.

Det bemærkes, at P_i og P_j er konjugerede, netop hvis der findes en permutation P_k, så

$$P_i = P_k P_j P_k^{-1}.$$

Problemet i det følgende er at finde en simpel betingelse for, at to permutationer er konjugerede.

Klasser af konjugerede i S_3

Vi ser som eksempel på permutationerne i S_3. For hver P_j kan man udregne samtlige permutationer, der er konjugerede med P_j. Tabellen nedenfor viser $P_k P_j P_k^{-1}$ for alle værdier af k og j. Søjle j består af de permutationer, der er konjugerede med P_j.

$k \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
2	P_1	P_2	P_5	P_6	P_3	P_4
3	P_1	P_6	P_3	P_2	P_5	P_4
4	P_1	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2
5	P_1	P_4	P_3	P_6	P_5	P_2
6	P_1	P_4	P_5	P_2	P_3	P_6

Man ser, at S_3 kan opdeles i disjunkte mængder, også kaldet *ækvivalensklasser* eller bare *klasser*, således at to permutationer tilhører samme klasse netop, hvis de konjugerede. Klasserne udgøres af $\{P_1\}$, $\{P_3, P_5\}$ og $\{P_2, P_4, P_6\}$. Ved *klassesummerne* forstås elementerne

$$K_1 = P_1, \qquad K_2 = P_3 + P_5, \qquad K_3 = P_2 + P_4 + P_6.$$

Ved brug af resultatet i forrige afsnit får vi, at X i A_3 er centralt, netop hvis det har formen

$$X = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3 \tag{9}$$

De tre klassesummer udgør altså en basis for centrum, og i forbindelse med udregning af produkter i centrum er det nyttigt at kende produkter af formen $K_i K_j$. Ved udregning får man

$$K_2^2 = 2K_1 + K_2, \quad K_2 K_3 = 2K_3, \quad K_3^2 = 3K_1 + 3K_2.$$

Da $K_1 = P_1$ er neutralt, og klassesummerne kommuterer, har man dermed alle produkter $K_i K_j$ skrevet på formen (9).

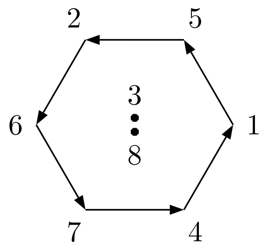
Cykler

I dette afsnit gives en oversigt over nogle begreber og resultater, der bruges i forbindelse med permutationer. Der findes en særlig simpel type permutationer, *cykler*, som er byggesten for samtlige permutationer forstået på den måde, at enhver permutation kan skrives som et produkt af cykler. Brug af cykler kan forenkle både opskrivning af permutationer og regning med permutationer.

Et eksempel på en cykel er følgende permutation i S_8:

$$P : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Med en pilefigur kan man illustrere, hvordan tallene afbildes ved P som vist på figuren nedenfor.



De tal, der ikke afbildes over i sig selv, er placeret på en cirkel, et hjul, således at man ser, at P laver en rotation med én plads i positiv omløbsretning, altså mod uret. En sådan permutation kan skrives i *cykelnotation*:

$$P = (\,1\;5\;2\;6\;7\;4\,).$$

Da permutationen er en rotation, er det ligegyldigt, hvilket tal, der står først, så man kan også skrive f.eks. $P = (\,6\;7\;4\;1\;5\;2\,)$.

En cykel med m tal, der roteres, kaldes en m-cykel, og P ovenfor er altså en 6-cykel. En 2-cykel ombytter to tal, og den kaldes en *transposition*. Et tal t, der afbildes over i sig selv, kaldes en 1-cykel eller et fixpunkt og skrives (t).

Opspaltning i disjunkte cykler

To cykler i S_n kaldes *disjunkte*, hvis der ikke er noget tal, der roteres i begge cykler. Der gælder følgende sætning:

> Enhver permutation kan skrives som et produkt af disjunkte cykler.

Det følgende eksempel viser, hvordan man får skrevet en permutation i S_6 som et produkt af disjunkte cykler, men forklarer samtidigt, hvorfor det generelt vil kunne lade sig gøre. Vi sætter

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man tager udgangspunkt i tallet 1, og ser at $P(1) = 4$. Dernæst ser man, at $P(4) = 5$, og at $P(5) = 1$, således at man er tilbage ved udgangspunktet. Vi har på denne måde fået cyklen $(1\;4\;5)$, og vi kan sige, at 1 *frembringer* denne cykel.

Blandt de resterende tal vælges det mindste, altså 2. Dette tal frembringer en 1-cykel. Det mindste tal blandt de resterende er nu 3, som frembringer 2-cyklen $(3\;6)$.

Man kan skrive P som et produkt af tre cykler:

$$P = (145)(2)(36), \tag{10}$$

men meget ofte udelader man 1-cyklerne, som er neutrale, så:

$$P = (145)(36), \tag{11}$$

Enhver permutation P kan på denne måde skrives som et produkt af disjunkte cykler.

De disjunkte cykler, der indgår i produktet, kan kun vælges på én måde, og de er altså entydigt bestemt. Man kan derfor tale om *cykelfremstillingen*, altså i bestemt form, af en permutation.

Det skal dog bemærkes, at faktorerne kan skrives i forskellig rækkefølge, og at 1-cykler både kan indgå eller udelades.

Ved *cykelstrukturen* af en permutation P forstås en angivelse af længden af de cykler, der fremkommer i cykelfremstillingen, hvor samtlige cykler indgår. Længderne bliver normalt skrevet i aftagende orden adskilt med kommaer. For eksempel vil (145)(2)(36) have cykelstrukturen (3,2,1) i S_6.

En *opdeling* af et naturligt tal n er et talsæt $(a_1, a_2, \ldots, a_h)$ med naturlige tal, hvis sum er n, og hvor hvert tal er større eller lig det efterfølgende. Enhver cykelstruktur i S_n svarer altså til en opdeling af n.

Konjugering og cykelstruktur

Vi ser på en permutation P i S_n, og skriver forskriften på tabelform, som vist nedenfor:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ P(1) & P(2) & \cdots & P(n) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Hvis Q er en anden permutation i S_n, kan vi lave en ny tabel ved at erstatte ethvert tal t i øverste og nederste række i (12) med $Q(t)$. Man kan sige, at man *omdøber* tallene i tabellen for P ved brug af Q. Det giver følgende tabel for en permutation R

$$R = \begin{pmatrix} Q(1) & Q(2) & \cdots & Q(n) \\ Q(P(1)) & Q(P(2)) & \cdots & Q(P(n)) \end{pmatrix}.$$

Vi har altså, at $R(Q(i)) = Q(P(i))$. Sættes $Q(i) = j$, får vi, at $i = Q^{-1}(j)$, så $R(j) = QPQ^{-1}(j)$, dvs. P og R er konjugerede:

$$R = QPQ^{-1} \tag{13}$$

Man kan også angive P på cykelform, og så finde R ved at erstatte ethvert tal t i cykeludtrykket med $Q(t)$. Da man bare

har omdøbt tal i cykelfremstillingen har R samme cykelstruktur som P, så der gælder altså, at *to konjugerede permutationer har samme cykelstruktur*.

Eksempel. Lad $P = (12)(34)$ og $Q = (123)$ i S_4. Omdøbes ved brug af Q, får man $R = (23)(14)$. Der vil altså gælde, at $R = QPQ^{-1}$, og man ser, at P og R har samme cykelstruktur.

Der gælder omvendt, at to permutationer P og R med samme cykelstruktur er konjugerede. Man kan nemlig placere cykeludtrykket for R under det for P, og lade Q være den permutation, der til et tal i den øverste permutation knytter tallet nedenunder i den nederste. For ethvert i vil $R(Q(i)) = Q(P(i))$, da $Q(i)$ og i rykkes en plads frem i cyklen ved hhv. R og P, så P og R er konjugerede. Alt i alt har vi altså

> To permutationer er konjugerede, netop hvis de har samme cykelstruktur.

Klasser af konjugerede i S_n bliver altså klasser bestående af permutationer med samme cykelstruktur. F. eks. vil klassesummerne K_1, K_2 og K_3 i S_3, svare til summen af permutationerne med cykelstrukturerne (1,1,1), (3), og (2,1).

Resultatet i rammen på side 21 kan nu skrives således:

> Et element X i A_n er centralt, netop hvis alle permutationer med samme cykelstruktur har samme koefficient i X.

Et element i A_n er altså centralt, netop hvis det er en linearkombination af klassesummerne. Da klassesummerne er lineært uafhængige, er dimensionen af centrum derfor lig med antal klasser af konjugerede, som igen er lig med antal opdelinger af n, og dette antal er ifølge side 20 også lig med det maksimale antal sub-algebraer i en dekomposition.

4. EN NY BASIS

Vi antager nu, at vi har fået skrevet A_3 som en direkte sum af 3 indbyrdes ortogonale sub-algebraer B_1, B_2 og B_3, og at man i hver B_i har en central idempotent I_i, således at

$$P_1 = I_1 + I_2 + I_3.$$

Da klassesummerne K_1, K_2 og K_3 udgør en basis for centrum vil hver I_i være en linearkombination af klassesummerne, og det følgende handler om, hvordan man kan finde linearkombinationerne og dermed finde I_1, I_2 og I_3.

Disse I_i vil også udgøre en basis for centrum, da de er indbyrdes ortogonale eftersom $I_i \in B_i$. Det betyder, at K_3 kan skrives på formen $K_3 = \sum \beta_j I_j$, og dermed at

$$K_3 I_i = \left(\sum \beta_j I_j\right) I_i = \beta_i I_i^2 = \beta_i I_i.$$

Vi ser på et fast i og kalder β_i for λ, så det ovenstående giver, at

$$\boxed{K_3 I_i = \lambda I_i.} \tag{14}$$

Da I_i er en linearkombination af klassesummerne, kan I_i skrives $I_i = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3$, og indsættes dette i (14), får man

$$K_3(\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3) = \lambda(\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3).$$

Man kan så gange ind i parenteserne, og benytte resultaterne nederst side 22, som giver

$$\alpha_1 K_3 + \alpha_2 2K_3 + \alpha_3(3K_1 + 3K_2) = \lambda\alpha_1 K_1 + \lambda\alpha_2 K_2 + \lambda\alpha_3 K_3.$$

Man kan her samle alle led på venstresiden og skrive resultatet som en linearkombination af klassesummerne, så man får

$$(3\alpha_3 - \lambda\alpha_1)K_1 + (3\alpha_3 - \lambda\alpha_2)K_2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \lambda\alpha_3)K_3 = 0.$$

En sådan linearkombination er kun 0, når alle koefficienter er 0, så man får 3 ligninger med 4 ubekendte:

$$3\alpha_3 - \lambda\alpha_1 = 0, \qquad 3\alpha_3 - \lambda\alpha_2 = 0, \qquad \alpha_1 + 2\alpha_2 - \lambda\alpha_3 = 0.$$

Ligningssystemet kan sammenfattes således

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

For givet λ er der egentlige løsninger $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, når koefficientmatricens determinant er lig 0. Determinanten bliver

$$-\lambda(\lambda^2 - 6) + 3\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 9),$$

og man ser, at den er 0, når λ er enten 3, 0 eller -3. De tilhørende $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ er proportionale med $(1, 1, 1)$, $(2, -1, 0)$ og $(1, 1, -1)$, så de mulige løsninger I_i til (14) er proportionale med hhv.

$$K_1 + K_2 + K_3, \qquad 2K_1 - K_2, \qquad K_1 + K_2 - K_3.$$

Man kan finde proportionalitetsfaktoren ved at gange hver af de tre med sig selv. F.eks. får man ved brug af resultaterne side 22:

$$(2K_1 - K_2)^2 = 4K_1^2 - 4K_1K_2 + K_2^2 = 6K_1 - 3K_2,$$

så $I_2 = \frac{1}{3}(2K_1 - K_2)$ er idempotent. Alt i alt får man:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{6}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6) \\ I_2 &= \tfrac{1}{3}(2P_1 - P_3 - P_5) \\ I_3 &= \tfrac{1}{6}(P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + P_5 - P_6). \end{aligned}} \tag{15}$$

Man kan umiddelbart kontrollere, at summen er P_1, og man kan regne efter, at I_i'erne er indbyrdes ortogonale.

Selvom (14) også gælder med K_2 og K_1 i stedet for K_3, kan disse ikke bruges til at finde I_1, I_2 og I_3 på samme måde som med K_3. Det skyldes, at man i disse tilfælde ikke får 3 forskellige værdier for λ, og det gør, at der er flere løsninger $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ end dem, der er proportionale med $(1, 1, 1)$, $(2, -1, 0)$ og $(1, 1, -1)$.

For $n = 4$ er der 5 forskellige klassesummer, nemlig dem der svarer til opdelingerne (4), (3,1), (2,2), (2,1,1) og (1,1,1,1), og dermed 5 ubekendte $I_1, \ldots, I_5$. Det er nogenlunde overkommeligt at finde disse I_i'er på samme måde, som når $n = 3$, men når n er større end 4, og der er endnu flere ubekendte, bliver det i praksis problematisk at finde de ubekendte på denne måde. En alternativ metode er den, som Young finder i 1901, og som bliver gennemgået i næste kapitel.

Sub-algebraerne B_i i A_3

Vi ser først på sub-algebraen B_1, der er lig mængden af XI_1, hvor X gennemløber A_3. Der gælder, at $P_iI_1 = I_1$ for alle i, idet

$$P_i(P_1 + P_2 + \cdots + P_6)$$

bliver en sum af alle permutationerne i S_3 i en eller anden rækkefølge. Heraf følger, at hvis $X = \sum x_iP_i$, så er

$$XI_1 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)I_1. \tag{16}$$

Specielt ses altså, at B_1 er 1-dimensional med I_1 som basis.

Hvad angår I_3 får man ved brug af tavlen (4), at $P_iI_3 = I_3$, hvis i er ulige, og $P_iI_3 = -I_3$, hvis i er lige, så

$$XI_3 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6)I_3. \tag{17}$$

Sub-algebraen B_3 er altså også 1-dimensional, og I_3 er basis.

Sub-algebraen B_2

Sub-algebraen B_2 er lig mængden af elementer af formen XI_2, hvor $X \in A_3$. Sættes $X = 3Z$, ses at alle elementer i B_2 også har formen $Z(2P_1 - P_3 - P_5)$, hvor $Z \in A_3$. Da Z er en linearkombination af permutationerne P_i, vil alle elementer i B_2 derfor være en linearkombination af elementerne $P_i(2P_1 - P_3 - P_5)$. Disse seks elementer er udregnet i tabellen nedenfor:

i	$P_i(2P_1 - P_3 - P_5)$
1	$2P_1 - P_3 - P_5$
2	$2P_2 - P_4 - P_6$
3	$2P_3 - P_1 - P_5$

i	$P_i(2P_1 - P_3 - P_5)$
4	$2P_4 - P_2 - P_6$
5	$2P_5 - P_1 - P_3$
6	$2P_6 - P_4 - P_2$

Elementerne ligger i B_2, og så også det, der svarer til $i = 1$, minus det, der svarer til $i = 3$, altså $3(P_1 - P_3)$, og dermed også $P_1 - P_3$. På denne måde får man følgende 4 elementer i B_2:

$$P_1 - P_3, \qquad P_1 - P_5, \qquad P_2 - P_4, \qquad P_2 - P_6.$$

De 4 elementer vil frembringe B_2, da hvert af de seks elementer i tabellen er en linearkombination af disse 4. F.eks. er

$$2P_1 - P_3 - P_5 = (P_1 - P_3) + (P_1 - P_5).$$

Dimensionen af B_2 er 4, så de fire elementer vil derfor udgøre en basis. Ethvert element i B_2 har altså formen

$$X = \alpha(P_1 - P_3) + \beta(P_1 - P_5) + \gamma(P_2 - P_4) + \delta(P_2 - P_6).$$

Skrives dette på formen $X = \sum x_iP_i$, ses at X ligger i B_2, netop når $x_1 + x_3 + x_5 = 0$ og $x_2 + x_4 + x_6 = 0$.

I kapitlerne 6 og 7 bestemmes en anden basis for B_2, der gør det lettere at udregne produkter i B_2.

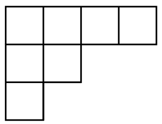
5. DE TO FØRSTE ARTIKLER

Young viste i artiklen fra 1901, hvordan man i A_n direkte kan beregne indbyrdes ortogonale centrale idempotente, hvis sum er den identiske permutation. At de kan beregnes direkte skal forstås sådan, at det ikke er nødvendigt at løse ligninger for at bestemme dem. I det følgende omtales hans fremgangsmåde i hovedtræk og med en lidt ændret notation.

Diagram og tableau

Til hver opdeling $(a_1, a_2, \ldots, a_h)$ af n knyttes et *Young-diagram* med n bokse opstillet i rækker, således at der er a_1 bokse i den øverste række, a_2 i den næstøverste osv., og således at første boks i de forskellige rækker står under hinanden. Nedenfor til venstre ses Young-diagrammet for opdelingen $(4, 2, 1)$ af 7.

Young-diagram

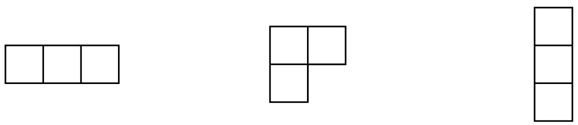


Young-tableau

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4&6&7&3\\\hline 2&1\\\cline{1-2} 5\\\cline{1-1}\end{array}$$

Nummereres boksene med tallene 1 til n i en vilkårlig rækkefølge, får man et *Young-tableau*; et eksempel er vist ovenfor til højre.

For $n = 3$ er der 3 opdelinger: (3), $(2,1)$ og $(1,1,1)$, og de tilhørende diagrammer er vist nedenfor:



Det kan bemærkes, at der ikke er fundet nogen generel formel til beregning af antal opdelinger af et givet helt tal.

Til hvert af disse diagrammer er der 3!, altså 6, tableauer. Til opdelingen (2,1) er der følgende tableauer:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}$$

De to første er standard-tableauer, idet et *standard-tableau* er et, hvor tallene i hver række og søjle står i voksende rækkefølge.

S-elementer

For et vilkårligt Young-tableau lader vi R være summen af de permutationer P_i, der bevarer rækkerne i tableauet. Her står R for *row*. At en række er bevaret betyder, at rækkefølgen af tallene kan være ændret, men ikke mængden af tal, der indgår.

Summen af alle elementer af formen $\text{sign}(P_i)P_i$, hvor P_i er en permutation, der bevarer søjlerne, kaldes C, hvor C står for *column*. Her er $\text{sign}(P_i)$ lig med -1, hvis der i cykelfremstillingen af P_i er et ulige antal cykler med lige længde, og hvis der er et lige antal cykler med lige længde, er $\text{sign}(P_i)$ 1. Endelig sættes

$$S = RC.$$

Som eksempel kan vi se på det første tableau af de seks for (2,1). Det er vist igen nedenfor.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

Rækkerne bevares dels af P_1, der ikke ændrer nummereringen, dels af P_2, der ombytter 1 og 2. Vi får altså, at $R = P_1 + P_2$. På tilsvarende måde får man $C = P_1 - P_4$, og dermed

$$S = RC = (P_1 + P_2)(P_1 - P_4) = P_1 + P_2 - P_4 - P_5.$$

Elementet S vil her blive kaldt et *S-element*. På engelsk er det blevet almindeligt, at kalde det en *Young symmetrizer*.

$\boldsymbol{T}$-elementer

Summen af alle S-elementer, der kan dannes af de forskellige tableauer hørende til en given opdeling, kaldes T eller $T_{a_1,a_2,\ldots,a_h}$, hvis man har brug for at angive opdelingen. For eksempel giver de seks tableauer for opdelingen (2,1) følgende S-elementer

$S = (P_1 + P_2)(P_1 - P_4) = P_1 + P_2 - P_4 - P_5$
$S = (P_1 + P_4)(P_1 - P_2) = P_1 - P_2 - P_3 + P_4$
$S = (P_1 + P_2)(P_1 - P_6) = P_1 + P_2 - P_3 - P_6$
$S = (P_1 + P_6)(P_1 - P_2) = P_1 - P_2 - P_5 + P_6$
$S = (P_1 + P_4)(P_1 - P_6) = P_1 + P_4 - P_5 - P_6$
$S = (P_1 + P_6)(P_1 - P_4) = P_1 - P_3 - P_4 + P_6$

Summen $T_{2,1}$ er $6P_1 - 3P_3 - 3P_5$. Tilsvarende er T_3 og $T_{1,1,1}$ lig med $6(P_1 + P_2 + \cdots + P_6)$ og $6(P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + P_5 - P_6)$. Permutationen P_1 kan skrives som en linearkombination:

$$P_1 = \tfrac{1}{36}T_3 + \tfrac{1}{9}T_{2,1} + \tfrac{1}{36}T_{1,1,1}. \tag{18}$$

De tre led på højresiden er lig med I_1, I_2 og I_3 som vi fandt på side 28, og Young kunne vise, at noget tilsvarende gælder generelt, således at man for et vilkårligt n kan lave en dekomposition i ortogonale sub-algebraer ved hjælp af elementerne $T_{a_1,a_2,\ldots,a_h}$.

Youngs hovedresultater i artiklen fra 1901 er, at T-elementer hørende til forskellige opdelinger af n er parvis ortogonale, og at der findes tal $\alpha_{a_1,a_2,\ldots,a_h}$ således at

$$\boxed{P_1 = \sum \alpha_{a_1,a_2,\ldots,a_h} T_{a_1,a_2,\ldots,a_h},} \tag{19}$$

hvor der summeres over alle opdelinger af n.

Han var på dette tidspunkt endnu ikke i stand til at give en generel formel for koefficienterne $\alpha_{a_1,a_2,\ldots,a_h}$, men han udregnede koefficienterne i de konkrete tilfælde, hvor $n = 2$, $n = 3$ og $n = 4$.

Nedenfor er vist, hvordan Young formulerer (19) i sin første artikel. Den neutrale permutation P_1 kalder han 1, og koefficienterne $\alpha_{a_1,a_2,\ldots,a_h}$ betegnes $A_{a_1,a_2,\ldots,a_h}$.

> of a single letter is unity). Then, if $T_{a_1, a_2, \ldots, a_h}$ be the sum of all expressions S formed as above from all possible tabular arrangements of the letters, so that there are a_1 letters in the first row, a_2 in the second, and so on, the a's satisfying
>
> $$a_1 + a_2 + \ldots + a_h = n,$$
>
> and $$a_1 \nless a_2 \nless a_3 \ldots \nless a_h,$$
>
> it is possible to uniquely determine numerical coefficients $A_{a_1, a_2, \ldots, a_h}$ so that
> $$1 = \Sigma A_{a_1, a_2, \ldots, a_h} T_{a_1, a_2, \ldots, a_h},$$

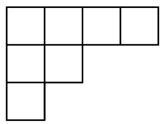
En lineær kombination af permutationer i S_n kalder Young for øvrigt en *substitutional expression*.

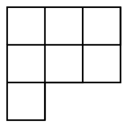
Udledning af hovedresultatet

Vi skal nu se, hvordan Young gør rede for, at T-elementerne er ortogonale, og hvordan han udleder formlen (19). Fremstillingen her følger i store træk Youngs, men indeholder flere eksempler.

Ortogonalitet af T-elementer

Vi ser på to forskellige opdelinger af n. Som eksempel bruges $n = 7$ og opdelingerne (4,2,1) og (3,3,1), som har diagrammerne:





De tilhørende T-elementer, $T_{4,2,1}$ og $T_{3,3,1}$, kaldes T og T'. Man kan vise, at $T'T = 0$ uden at lave konkrete udregninger, men udelukkende benytte følgende: For ethvert tableau hørende til

(4,2,1) og ethvert tableau hørende til (3,3,1) vil der i række 1 af det første tableau være to tal a og b, som indgår i samme søjle af det andet tableau. Dette skyldes simpelthen, at række 1 i det første tableau er længere end rækkerne i det andet.

Nedenfor er vist to tilfældige tableauer hørende til opdelingerne. De tilhørende S-elementer kaldes S og S', hvor $S' = R'C'$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 6 & 7 & 3 \\ \hline 2 & 1 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 5 \\ \hline 7 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Det ses, at talparret (6,7) indgår i række 1 i det første tableau og i søjle 1 i det andet. Transpositionen $(6\,7)$ kaldes nu $(a\,b)$.

Da $(a\,b)$ bevarer en række i tableauet til venstre, vil $(a\,b)R$ være lig med R. Hvis P nemlig er en permutation, der bevarer rækkerne, så vil $(a\,b)P$ også være det, og omvendt, da $(a\,b)(a\,b)P = P$, så kan enhver permutation, der bevarer rækkerne, skrives på formen $(a\,b)Q$, hvor Q bevarer rækkerne.

Eftersom R er summen af de permutationer, der bevarer rækkerne, så vil $(a\,b)R$ også give summen R bare med leddene i en anden rækkefølge.

På tilsvarende måde ses, at da $(a\,b)$ bevarer en søjle i tableauet til højre, vil $C'(a\,b)$ være lig med $-C'$. Den eneste forskel fra før er, at man her skal bruge, at $\text{sign}(P(a\,b)) = -\text{sign}(P)$, hvor P er en permutation, der bevarer søjlerne.

Da $(a\,b)(a\,b)$ er den neutrale permutation, giver $(a\,b)R = R$ og $C'(a\,b) = -C'$ tilsammen, at

$$C'R = C'(a\,b)(a\,b)R = -C'R.$$

Heraf følger, at $C'R = 0$, og dermed, at $S'S = 0$, da $S'S$ er lig med $R'C'RC$. Elementerne T og T' er hver for sig sum af alle S-elementer for de tilhørende opdelinger, så $T'T$ er en sum af led af formen $S'S$, og da de alle er 0, er $T'T = 0$.

Noget helt tilsvarende gælder for vilkårlige opdelinger af n, altså at $T'T = 0$, hvis T *kommer før* T', når T-elementerne er opstillet i rækkefølge på følgende måde: Elementet T kommer før T', hvis den første række i diagrammet for T, der ikke har samme længde som den tilsvarende række i diagrammet for T', er længere end den tilsvarende række i diagrammet for T'.

Det generelle bevis bygger på, at hvis T kommer før T', så gælder følgende: For ethvert tableau hørende til diagrammet for T og ethvert tableau hørende til diagrammet for T' vil der i en af rækkerne i det første tableau være to tal a og b, som befinder sig i samme søjle i det andet tableau.

På næste side vises uafhængigt af det foregående, at ethvert T-element er centralt. Det medfører, at $TT' = T'T = 0$, altså at T-elementer hørende til forskellige opdelinger er ortogonale.

T-elementerne er centrale

For at bevise, at T-elementerne er centrale, bemærkes først, at hvis S hører til et givet tableau, og man laver et nyt tableau ud fra samme diagram, så har man en omdøbning, der svarer til en permutation Q. Ved brug af resultaterne på side 25 får man, at det S-element, der svarer til det nye tableau, vil være QSQ^{-1}.

Som eksempel kan vi i A_3 se på de to tableauer nedenfor. Her er Q lig med permutationen (123), altså P_3. Den omvendte permutation Q^{-1} er (132), altså P_5.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Ifølge tabellen side 33 er S-elementet hørende til det første tableau $P_1 + P_2 - P_4 - P_5$, som vi kalder S. Til det andet tableau skulle så svare S-elementet $P_3 S P_5$, som er $P_1 - P_2 - P_5 + P_6$, hvilket passer med tabellen side 33.

For et givet S-element S kan man derfor få ethvert andet S-element som $P_i S P_i^{-1}$, hvor P_i er en permutation af tallene i tableauet, og vi har dermed følgende udtryk for T:

$$T = \sum_{P_i \in S_n} P_i S P_i^{-1}, \tag{20}$$

Næste trin er at vise, at $TP_j = P_j T$ for alle P_j i S_n. Ganges fra venstre med P_j og fra højre med P_j^{-1} i (20), får man

$$P_j T P_j^{-1} = \sum_{P_i \in S_n} P_j P_i S P_i^{-1} P_j^{-1}.$$

Sætter vi derfor $P_j P_i = P_k$, har vi, at

$$P_j T P_j^{-1} = \sum_{P_k \in S_n} P_k S P_k^{-1} = T.$$

Det giver, at $P_j T = TP_j$, altså at T kommuterer med alle P_j i S_n. Da vil T også kommutere med ethvert element i A_n, det vil sige, at T er centralt.

Det sidste trin i udledningen

Da ethvert T-element er centralt, er det en linearkombination af klassesummerne ifølge side 26, og da T-elementerne er parvis ortogonale er de lineært uafhængige ligesom klassesummerne. Da der er lige mange klassesummer og T-elementer, og T-elementerne er linearkombinationer af klassesummerne, så kan hver klassesum omvendt skrives som en linearkombination af T-elementerne. Det gælder specielt klassesummen P_1, og så har man (19).

Young ganger så på begge sider af (19) med $T_{a_1,a_2,\ldots,a_h}$ og bruger ortogonaliteten af T-elementerne til at få, at

$$T_{a_1,a_2,\ldots,a_h} = \alpha_{a_1,a_2,\ldots,a_h} T^2_{a_1,a_2,\ldots,a_h}$$

Ved at gange på begge sider af denne ligning med $\alpha_{a_1,a_2,\ldots,a_h}$ ses, at hvert led i (19) er idempotent.

Artiklen fra 1902

I artiklen fra 1902 viser Young, hvordan han er kommet frem til en formel for koefficienterne $\alpha_{a_1,a_2,\ldots,a_h}$. Udledningen er ret teknisk, og den overspringes, men slutresultatet er følgende formel, hvor det forudsættes, at $r < s$ i tælleren:

$$\boxed{\alpha_{a_1,a_2,\ldots,a_h} = \left(\frac{\prod_{r,s}(a_r - a_s - r + s)}{\prod_r (a_r + h - r)!} \right)^2} \tag{21}$$

Endvidere viser han, at der for alle S-elementer gælder, at

$$\sqrt{\alpha} S^2 = S, \tag{22}$$

hvor $\alpha = \alpha_{a_1,a_2,\ldots,a_h}$, så $\sqrt{\alpha} S$ er altså idempotent.

Sammenfatning af de to første artikler

Young bruger ikke selv begrebet sub-algebra, men artiklerne fra 1901 og 1902 giver via (19), det vil sige formlen

$$P_1 = \sum \alpha_{a_1,a_2,\ldots,a_h} T_{a_1,a_2,\ldots,a_h},$$

en dekomposition af A_n i ortogonale sub-algebraer $B_{a_1,a_2,\ldots,a_h}$, der er frembragt af de idempotente elementer $I_{a_1,a_2,\ldots,a_h}$, som er lig med de enkelte led i summen på højresiden af formlen.

At sub-algebraerne er ortogonale følger af, at T'erne og dermed I'erne er centrale og parvis ortogonale, så $XIYI'$ er lig med $XYII'$, som er 0, når I og I' er to forskellige I'er, og X og Y er to vilkårlige elementer i A_n.

En nærmere beskrivelse af disse sub-algebraer nåede Young først frem til i artiklen fra 1927, og det er resultatet af denne artikel, der omtales i de følgende to kapitler. Som gennemgående eksempel bruges $B_{2,1}$ i A_3, som også er blevet kaldt B_2.

6. MATRIXALGEBRAER

Den 4-dimensionale sub-algebra B_2 i A_3 kan ikke dekomponeres videre i en direkte sum af ortogonale sub-algebraer, da der ikke kan være mere end 3 ortogonale sub-algebraer. Vi skal se, at B_2 er isomorf med en 2×2 matrixalgebra. Som vist på side 30 har elementerne i B_2 formen

$$\alpha(P_1 - P_3) + \beta(P_1 - P_5) + \gamma(P_2 - P_4) + \delta(P_2 - P_6),$$

så umiddelbart ligner B_2 ikke en matrixalgebra, men i dette kapitel udledes egenskaber ved matrixalgebraer, som så kan bruges til at finde strukturen i B_2.

Egenskaber ved matrixalgebraer

Mængden af 2×2 matricer kaldes M_2. Regneoperationerne kan beskrives ved at se på matricerne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Følgende to regneoperationer gør M_2 til et vektorrum:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}, \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

Her er λ et tal. Produkt af to matricer sker ved række-søjle multiplikation, hvor man udregner prikprodukter af rækker i den første matrix med søjler i den anden:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Man kan let tjekke, at man har en algebra. Den har dimension 4, og som basisvektorer kan man tage fire matricer E_{ij}, hvor E_{ij} er den matrix, der har netop ét 1-tal, som står i række i og søjle j, og ellers 0 overalt. Altså

$$E_{11} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricen $E_{11} + E_{22}$ er et neutralt element ved multiplikation. Det ses, at der for en vilkårlig matrix X gælder, at

$$x_{11}E_{11} + x_{12}E_{12} + x_{21}E_{21} + x_{22}E_{22} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \tag{23}$$

Række-søjle multiplikationen gør, at der, når $j \neq \ell$, gælder at

$$\boxed{E_{ij}E_{jk} = E_{ik}, \qquad E_{ij}E_{\ell k} = 0.} \tag{24}$$

Specielt gælder, at $E_{11}^2 = E_{11}$, $E_{22}^2 = E_{22}$, $E_{11}E_{22} = 0$ og $E_{22}E_{11} = 0$, så disse matricer er idempotente og ortogonale. De er imidlertid ikke centrale, da $E_{11}E_{12} = E_{12}$, og $E_{12}E_{11} = 0$. For enhver matrix X gælder, at

$$\boxed{E_{ii}XE_{jj} = x_{ij}E_{ij}} \tag{25}$$

Dette kan vises brug af (24). Hvis f.eks. $i = 2$ og $j = 1$, ganges fra venstre med E_{22} på venstresiden af (23), så man får

$$x_{21}E_{21} + x_{22}E_{22}.$$

Ganger man derefter fra højre med E_{11}, får man $x_{21}E_{21}$.

Hvis man omvendt i en algebra som B_2 kan finde fire elementer E_{ij}, der opfylder (24), så har algebraen struktur som en matrixalgebra. En mulig fremgangsmåde er først at finde to ortogonale idempotente, hvis sum er det neutrale element. De kan være kandidater til E_{11} og E_{22}. Dernæst kan man bruge (25) til at finde et element, der er proportionalt med E_{12}, ved at vælge et X så venstresiden af (25) ikke er 0. Tilsvarende med E_{21}.

Eksempel

Vi ser igen på sub-algebraen B_2. Som kandidater til E_{11} og E_{22} kan man tage de idempotente, der svarer til S-elementerne øverst i tabellen side 33, altså

$$E_{11} = \tfrac{1}{3}(P_1 + P_2 - P_4 - P_5), \quad E_{22} = \tfrac{1}{3}(P_1 - P_2 - P_3 + P_4).$$

Summen er nemlig lig med det neutrale element I_2, og man kan regne efter, at de er ortogonale. Endelig kan man se, at de ligger i B_2, da de er linearkombinationer af de fire basisvektorer, der er nævnt øverst side 39.

Ved at indsætte de to første af de fire basisvektorer i (25), altså ved at udregnes $E_{11}(P_1 - P_5)E_{22}$ og $E_{22}(P_1 - P_3)E_{11}$ får man to elementer, der kan bruges som E_{12} og E_{21}, nemlig

$$E_{12} = \tfrac{1}{3}(P_3 - P_4 - P_5 + P_6), \quad E_{21} = \tfrac{1}{3}(-P_2 - P_3 + P_5 + P_6).$$

Man kan kontrollere, at de sammen med E_{11} og E_{22} opfylder (24), og specielt følger, at B_2 er isomorf med M_2 via m_2, hvor

$$m_2\left(x_{11}E_{11} + x_{12}E_{12} + x_{21}E_{21} + x_{22}E_{22}\right) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

At den bijektive afbildning m_2 er en isomorfi mellem B_2 og M_2 er ensbetydende med, at der for alle X og Y i B_2 gælder, at

$$m_2(XY) = m_2(X)m_2(Y). \tag{26}$$

Et vilkårligt element X i B_2 kan nu både skrives som øverst på side 39 og som en linearkombination af formen $\sum x_{ij}E_{ij}$. Hvis man kender koefficienterne i den førstnævnte linearkombination, kan man ved brug af (25) beregne x_{ij} i den anden form som koefficienten til E_{ij} i $E_{ii}XE_{jj}$. Hvis man omvendt har X givet som $\sum x_{ij}E_{ij}$, kan man omskrive til formen øverst på side 39 ved at udtrykke alle E_{ij} ved P_i'erne.

En sub-matrixalgebra

Produktet $\sum z_iP_i$ af to elementer $X = \sum x_iP_i$ og $Y = \sum y_iP_i$ i A_3 kan ifølge side 16 udregnes på følgende måde

$$(z_1\ z_2\ \cdots\ z_6) = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_6)f(Y), \tag{27}$$

hvor $f(Y)$ er matricen, der er vist neden for.

$$f(Y) : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ y_2 & y_1 & y_6 & y_5 & y_4 & y_3 \\ y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_6 & y_5 \\ y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 \\ y_6 & y_5 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Man kan vise, at matricer af denne form udgør en sub-algebra $M(A_3)$ i den fulde matrixalgebra M_6 bestående af alle 6×6 matricer. Specielt gælder altså, at produktet af to matricer af formen (28) også har formen (28). Første række i $f(X)$ og $f(XY)$ er $(x_1\ x_2\ \cdots\ x_6)$ og $(z_1\ x_2\ \cdots\ z_6)$, så (27) giver, at

$$f(XY) = f(X)f(Y). \tag{29}$$

Da f også er bijektiv, er f altså en isomorfi mellem A_3 og $M(A_3)$. Produktet af elementerne X og Y kan derfor også udregnes som et matrix-produkt af de to 6×6-matricer $f(X)$ og $f(Y)$.

Man kan godt kalde $M(A_3)$ for en matrixalgebra, men det er ikke en *fuld* eller *simpel* matrixalgebra, da den ikke består af samtlige matricer i M_6.

Frobenius studerede som tidligere nævnt strukturen af A_n sideløbende med Young. Han kom i gang med arbejdet ved at prøve at faktorisere determinanten af en matrix af formen (28). Frobenius arbejdede ikke med elementerne i A_3 som linearkombinationer af permutationer ligesom Young, men som matricer i algebraen $M(A_3)$.

7. DEN TREDJE ARTIKEL

I dette kapitel anvendes metoder fra Youngs artikel fra 1927 til at vise, at sub-algebraen B_2 i A_3 er isomorf med en fuld matrixalgebra. Desuden sammenfattes resultaterne i de tre artikler i en beskrivelse af A_3 ved brug af fulde matrixalgebraer.

Standard-tableauer

Det blev tidligere på side 32 nævnt, at der til opdelingen $(2,1)$ af 3 hører to standard-tableauer, nemlig:

1	2
3	

1	3
2	

Young udleder følgende formel for antallet af standard-tableauer hørende til opdelingen $(a_1, a_2, \cdots, a_h)$:

2. THEOREM II. *The number of standard tableaux belonging to* $T_{a_1, a_2, \ldots, a_h}$ *is*

$$n!\,\frac{\prod\limits_{r,s}(a_r - a_s - r + s)}{\prod\limits_{r}(a_r + h - r)!}.$$

Han forudsætter i tælleren, at $r < s$, således at $a_r \geq a_s$. Antallet af standard-tableauer kalder han f. Sammenlignes med formlen for $\alpha = \alpha_{a_1, a_2, \ldots, a_h}$ på side 38 ses, at $f = n!\sqrt{\alpha}$.

Young viser, at man i stedet for at udregne T-elementer som en sum af samtlige S-elementer hørende til en given opdeling, kan nøjes med at tage summen af S-elementer hørende til standard-tableauerne og gange med en konstant, der er lig med $n!$ divideret med f. Da standard-tableauerne kun udgør en lille del af samtlige tableauer har man opnået en stor forenkling ved beregning af T-elementer.

En ny basis

Som et endnu vigtigere resultat, fandt Young, at man også kan bruge standard-tableauerne til at vise, at en sub-algebra som B_2 er en matrixalgebra, som vi nu skal se.

De to standard-tableauer på forrige side kaldes tableau 1 og tableau 2, hvor tableau 1 er det til venstre. De tilhørende S-elementer kalder vi S_1 og S_2.

Lad P_{ji} være den permutation, der fører tableau i over i tableau j forstået på den måde, at hvis hvert tal x i tableau i erstattes af $P_{ji}(x)$, så får man tableau j. I eksemplet ses, at

$$P_{11} = P_1, \qquad P_{12} = P_6, \qquad P_{21} = P_6, \qquad P_{22} = P_1.$$

Young ser på elementer af formen $R_i P_{ij} C_j$, og de elementer man får ved at gange med $\sqrt{\alpha}$, kalder vi her for E_{ij}. Da $f = 2$ og $n! = 6$ får vi altså

$$\boxed{E_{ij} = \tfrac{1}{3}\, R_i P_{ij} C_j} \tag{30}$$

For $i = j$ er $R_i P_{ii} C_i = S_i$, da $P_{ii} = P_1$. Udregninger giver

$$\begin{aligned}
R_1 P_{11} C_1 &= (P_1 + P_2) P_1 (P_1 - P_4) = P_1 + P_2 - P_4 - P_5 \\
R_1 P_{12} C_2 &= (P_1 + P_2) P_6 (P_1 - P_2) = P_3 - P_4 - P_5 + P_6 \\
R_2 P_{21} C_1 &= (P_1 + P_4) P_6 (P_1 - P_4) = -P_2 - P_3 + P_5 + P_6 \\
R_2 P_{22} C_2 &= (P_1 + P_4) P_1 (P_1 - P_2) = P_1 - P_2 - P_3 + P_4
\end{aligned}$$

Det bemærkes, at de tilhørende E_{ij}'er er lig med dem på side 41, men det er lettere at finde dem ved denne fremgangsmåde. Der er også den fordel, at man kan bevise, at E_{ij}'erne opfylder (24) uden at behøve at lave kontrol ved konkret udregning. For at lave et sådant bevis følger vi helt Youngs fremgangsmåde og udleder først nogle regneregler for elementerne $R_i P_{ij} C_j$.

Regneregler

Af resultaterne i afsnittet om omdøbning side 25 følger nogle sammenhænge mellem R_i'erne og mellem C_i'erne. Først bemærkes, at R_i er summen af de permutationer P, der bevarer rækkerne i tableau i, og ved omdøbning til tableau j bliver en sådan permutation P til $P_{ji}PP_{ji}^{-1}$, som er en permutation, der bevarer rækkerne i tableau j. Det giver, at $P_{ji}R_iP_{ji}^{-1} = R_j$. På tilsvarende måde ser man, at $P_{ji}C_iP_{ji}^{-1} = C_j$, så man alt i alt får,

$$P_{ji}R_i = R_jP_{ji}, \qquad P_{ji}C_i = C_jP_{ji}. \tag{31}$$

Matrix-egenskaben

Vi kan nu vise, at de konstruerede E_{ij} vil opfylde (24) i tilfældet $n = 3$. Først bemærkes, at $\sqrt{\alpha}S^2 = S$ ifølge (22), så $S^2 = 3S$. Den første egenskab i (24) er $E_{ij}E_{jk} = E_{ik}$, og ved at gange på begge sider med 9 ses, at det er ensbetydende med, at

$$R_iP_{ij}C_jR_jP_{jk}C_k = 3R_iP_{ik}C_k.$$

Ved brug af (31) kan venstresiden omskrives til $P_{ij}R_jC_jR_jP_{jk}C_k$, og dernæst til $P_{ij}P_{jk}R_kC_kR_kC_k$. Da $R_kC_k = S_k$ og $S_k^2 = 3S_k$, kan venstresiden omskrives videre til $3P_{ik}R_kC_k$, altså højresiden.

For at vise den anden egenskab i (24), altså at $E_{ij}E_{\ell k} = 0$, når $j \neq \ell$, laves følgende omskrivninger:

$$R_iP_{ij}C_jR_\ell P_{\ell j}C_k = P_{ij}R_jC_jR_\ell C_\ell P_{\ell j} = P_{ij}S_jS_\ell P_{\ell j}.$$

Man kan kontrollere ved udregning, at S_1 og S_2 er ortogonale, så det sidste udtryk lig med 0. De to egenskaber i (24) er altså opfyldt, så E_{ij}'erne er basisvektorer for en fuld matrixalgebra.

Det skal bemærkes, at det eneste, der krævede beregning, var at vise, at S_1 og S_2 er ortogonale. To S-elementer hørende til forskellige tableauer er ortogonale for alle opdelinger når $n = 3$ og $n = 4$, men det gælder ikke generelt for højere n.

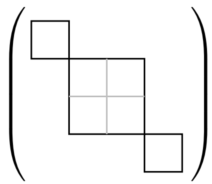
Blokdiagonalisering

Brugt på A_3 kan man kort sammenfatte resultaterne i de tre artikler således: De to første giver en dekomposition af A_3 i tre ortogonale sub-algebraer B_1, B_2 og B_3, hvor sub-algebraerne B_1 og B_3 er 1-dimensionale, mens B_2 er 4-dimensional. Den tredje artikel giver en isomorfi m_2 fra B_2 til en fuld 2×2 matrixalgebra.

Da B_1 og B_3 er 1-dimensionale findes også automatisk isomorfier m_1 og m_3 fra B_1 og B_3 til en 1×1 matrixalgebra.

Hvert element X i A_3 kan derfor på entydig måde skrives som en sum $X_1 + X_2 + X_3$, hvor $X_i \in B_i$, og til hvert X_i kan man derefter knytte matricen $m_i(X_i)$, som man kan kalde $m_i(X)$.

Man kan sammenstykke matricerne $m_i(X)$ til en 4×4-matrix:



Blokkene er hhv. $m_1(X)$, $m_2(X)$ og $m_3(X)$, og der står 0 uden for disse. Matricen kaldes $m(X)$, og man siger, at en sådan matrix er *blokdiagonal*. Da der for alle i gælder, at

$$m_i(XY) = m_i(X)m_i(Y). \tag{32}$$

ganger man to matricer $m(X)$ og $m(Y)$ blokvist. På den måde bliver udregningen af et produkt reduceret til to simple talmultiplikationer og en multiplikation af to 2×2-matricer. Man kan sammenfatte (32) til

$$m(XY) = m(X)m(Y). \tag{33}$$

Matricerne af formen $m(X)$ udgør altså en sub-algebra i mængden M_4 af alle 4×4-matricer. Sub-algebraen er isomorf med A_3, og blokformen illustrerer dermed tydeligt strukturen af A_3.

Udregning af blokkene

Vi antager nu, at X er et element i A_3 skrevet på formen $\sum x_i P_i$, og vi vil finde et eksplicit udtryk for $m(X)$, hvor $m(X)$ er en matrix på diagonalform med egenskaber som på forrige side.

Man kan her udnytte de idempotente I_i, der er angivet på side 28, og som opfylder, at $I_i \in B_i$, og at $P_1 = I_1 + I_2 + I_3$. Ved at gange med X får man skrevet X som en sum

$$X = XI_1 + XI_2 + XI_3,$$

og XI_i er den komponent X_i af X, der ligger i B_i.

Da I_1 er en basisvektor for det 1-dimensionale rum B_1, er $XI_1 = a_1 I_1$ for et tal a_1, der kan bruges som $m_1(X)$. Udregningen af XI_1 på side 29 giver tallet $m_1(X)$, der er vist i boksen nedenfor. Tilsvarende med $m_3(X)$.

Som forklaret nederst side 41 kan man til XI_2 knytte den 2×2 matrix, som man får ved at udregne x_{ij} som koefficienten til E_{ij} i $E_{ii} X I_2 E_{jj}$. Matricen kan bruges som $m_2(X)$. Her er E_{ij} de elementer, der også er vist på side 41. Da I_2 er neutral i B_2 gælder, at $E_{ii} X I_2 E_{jj}$ er lig med $E_{ii} X E_{jj}$, og udregning af disse elementer giver en matrix som vist i rammen nedenfor.

$$m_1(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$m_2(X) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & -x_2 + x_3 - x_5 + x_6 \\ -x_3 - x_4 + x_5 + x_6 & x_1 - x_2 + x_4 - x_5 \end{pmatrix}$$

$$m_3(X) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6.$$

Blokmatricerne består af de tal a_i, man får, når $X = \sum x_i P_i$ skrives på formen $a_1 I_1 + a_2 E_{11} + a_3 E_{12} + a_4 E_{21} + a_5 E_{22} + a_6 I_3$.

Generelt om A_n

Generelt kommer Young frem til følgende om strukturen af A_n: Man kan lave en dekomposition af A_n som en sum af ortogonale sub-algebraer $B_{a_1,\dots,a_h}$, hvor der summeres over alle opdelinger $(a_1, \dots, a_h)$ af n. Hver af disse sub-algebraer er isomorfe med en fuld matrixalgebra, og dimensionen af denne matrixalgebra er lig med $f^2_{a_1,\dots,a_h}$, hvor $f_{a_1,\dots,a_h}$ er antallet af standard-tableauer hørende til den givne opdeling. Dette antal kan beregnes ved hjælp af formlen på side 43.

Dimensionen af A_n er $n!$, og den er også er lig med summen af dimensionerne af sub-algebraerne $B_{a_1,\dots,a_h}$, så der gælder, at

$$\sum f^2_{a_1,\dots,a_h} = n!,$$

hvor der summeres over alle opdelinger $(a_1, \dots, a_h)$ af n.

Ved hjælp af isomorfien mellem sub-algebraerne $B_{a_1,\dots,a_h}$ og de tilhørende fulde matrix-algebraer kan man til hvert element X i A_n knytte en matrix $m(X)$, der er blok-diagonal. Blokkene er $f_{a_1,\dots,a_h} \times f_{a_1,\dots,a_h}$-matricer, og hvis man sætter

$$d = \sum f_{a_1,\dots,a_h},$$

hvor der summeres over alle opdelinger $(a_1, \dots, a_h)$ af n, så vil $m(X)$ altså være en $d \times d$-matrix.

Ovenstående generelle resultater kan udledes som for A_3, bortset fra at når $n \geq 5$, så er S-elementer svarende til forskellige standard-tableauer ikke nødvendigvis ortogonale. Young fandt imidlertid i sin tredje artikel ud af, hvordan man kan lave en mindre modifikation af S-elementerne, således at man får ortogonale elementer, der kan få resten af teorien til at fungere. Disse modifikationer bliver ikke omtalt her, da de er en teknisk detalje, der ikke har betydning for den øvrige teori.

8. ANVENDELSER

Youngs resultater om matrixstrukturen af algebraen A_n forenkler udregningen af produkter i A_n, og dermed bliver det også nemmere at løse ligninger af typen

$$AX = B,$$

hvor A og B er kendte elementer i A_n og X er et ukendt element i A_n. I det følgende vises i et eksempel, hvordan hans resultater kan bruges til at løse en sådan ligning.

Løsning af ligning

Vi ser på ligningen $AX = B$ i A_3 med følgende elementer

$$A = (7, 2, -5, 4, -8, 1), \qquad B = (-36, -25, 8, -17, 47, 48),$$

hvor koordinaterne er i basen $(P_1, \ldots, P_6)$. Ideen er, at udregne $m_i(A)$ og $m_i(B)$ for $i = 1, 2, 3$, og derefter benytte, at

$$m_i(A)m_i(X) = m_i(B). \tag{34}$$

Ved at løse disse simplere ligninger, kan man finde alle $m_i(X)$ og dermed også finde X. Matricerne $m_i(A)$ og $m_i(B)$ udregnes ved brug af formlerne side 47, og man får:

$$m_1(A) = 1, \quad m_3(A) = -13, \quad m_1(B) = 25, \quad m_3(B) = 13.$$

$$m_2(A) : \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}, \qquad m_2(B) : \begin{pmatrix} -52 & 34 \\ 104 & -75 \end{pmatrix}.$$

Ligningerne (34) for $i = 1, 3$ bliver så til

$$m_1(X) = 25, \qquad -13m_3(X) = 13,$$

og vi får altså $m_1(X) = 25$, og $m_3(X) = -1$.

For at finde $m_2(X)$ kan man løse matrixligningen

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -6 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 & 34 \\ 104 & -75 \end{pmatrix}.$$

Dette giver følgende to ligningssystemer

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -6 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 \\ 104 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -6 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ -75 \end{pmatrix}.$$

Ved at løse begge de to ligninger med to ubekendte får man

$$m_2(X) : \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Man kan så udregne X som

$$25I_1 - 6E_{11} + 4E_{12} + 4E_{21} - 3E_{22} - I_3,$$

hvilket giver $X = 1P_1 + 2P_2 + 5P_3 + 4P_4 + 6P_5 + 7P_6$, altså $X = (1, 2, 5, 4, 6, 7)$ i basen $(P_1, \ldots, P_6)$.

Invertible elementer

En ligning af typen $AX = B$ i A_3 har netop én løsning, hvis og kun hvis ligningen $m(A)m(X) = m(B)$ har netop én løsning, hvilket igen er ensbetydende med, at determinanten for $m(A)$ er forskellig fra 0. Denne determinant kan udregnes som produktet af determinanterne for $m_i(A)$. I eksemplet ovenfor får man, at determinanten for $m(A)$ er $1 \cdot 182 \cdot (-13) = -2366$.

Et element A er *invertibelt*, netop når der findes et element X, så $AX = XA = P_1$. Elementet A er derfor invertibelt, netop når determinanten for $m(A)$ er forskellig fra 0, altså netop når determinanten for $m_i(X)$ er forskellig fra 0 for $i = 1, 2, 3$.

Ligningen $AX = 0$

En ligning $AX = 0$ i A_3 har ikke andre løsninger end $X = 0$, når determinanten for $m(X)$ er forskellig fra 0. Vi ser nu på et tilfælde, hvor determinanten er lig med 0, nemlig det tilfælde, hvor determinanten for $m_2(A)$ er lig 0, men hvor determinanterne for $m_1(A)$ og $m_3(A)$ ikke er 0.

Når ligningen splittes op i ligningerne $m_i(A)m_i(X) = 0$, er det kun $m_2(A)m_2(X) = 0$, der har andre løsninger end 0. Denne ligning kan skrives som 2 identiske ligninger $m_2(A)S_i = 0$, hvor S_i er søjle i i $m_i(X)$. Hver af disse ligninger har en egentlig løsning S, og enhver matrix $m_i(X)$, hvor S er den ene søjle, og den anden søjle er 0, er løsning til $m_i(A)m_i(X) = 0$. Der er altså mindst 2 uafhængige løsninger.

Repræsentationer af S_3

For hvert af elementerne P_k kan man udregne matricen $m_2(P_k)$ ved formlen fra side 47. Man får for eksempel $m_2(P_2)$ ved at sætte $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Skemaet nedenfor viser resultaterne:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ved brug af (32) får man følgende sammenhæng:

$$m_2(P_k P_\ell) = m_2(P_k)m_2(P_\ell) \tag{35}$$

Man siger, at matricerne $m_2(P_k)$ giver en 2-dimensional *repræsentation* af S_3. Denne repræsentation er bijektiv, så i stedet for at gange to permutationer ved sammensætning af funktioner, kan man gange de tilhørende matricer med hinanden.

Matricerne $m_1(P_k)$ og $m_3(P_k)$ giver 1-dimensionale repræsentationer af S_3, men disse er ikke bijektive. For eksempel er $m_1(P_k)$ lig med 1 for alle P_k.

De tre repræsentationer er de simpleste repræsentationer af S_3, da man kan vise, at enhver repræsentation af S_3 i en vis forstand kan opbygges af dem, men det er en anden historie.

Det bemærkes, at man har fundet de tre repræsentationer ved at udvide S_3 til A_3, som man så har fundet strukturen i, og denne struktur kunne så udnyttes til at opnå resultater om S_3.

Anvendelser i kvantemekanikken

Første gang kendskabet til strukturen af algebraen A_n blev brugt inden for fysik var i 1927 i en artikel af Eugene Wigner (1902-1995) med titlen *Über nicht kombinierende Terme in der neueren Quantentheorie. Zweiter teil.* I forbindelse med et kvantemekanisk problem så han her på ligninger, der kan skrives på formen $AX = 0$, hvor A og X tilhører A_n, og X skal opfattes som ubekendt. Han løste sit problem ved at anvende resultater om A_n, som de var formuleret hos Frobenius og Issai Schur (1875–1941).

Efter Wigners artikel blev det almindeligt at bruge repræsentationer af grupper inden for kvantemekanikken. Selv om de fleste af disse grupper i modsætning til S_n var uendelige, viste det sig, at man kunne bestemme repræsentationer af dem ved at udnytte repræsentationerne af S_n. Det var i denne proces i 1930'erne og 1940'erne, at Youngs arbejder for alvor begyndte at vinde indpas både inden for matematik og fysik.

Indeks